Initiation à la pratique de l'électronique

PRATIQUE DES CIRCUITS LOGIQUES

Aujourd'hui vous allez apprendre que :
– Les circuits logiques peuvent se simplifier moyennant l'application de quelques règles très simples (algèbre de Boole et théorèmes de De Morgan).
– Les lois distributives et associatives de l'algèbre classique s'appliquent également aux équations logiques.
– Une relation utile à connaître est :
$A + \overline{A}B = A + B$
– La conversion des fonctions peut être obtenue par méthode algébrique ou par méthode graphique.
– La méthode algébrique utilise l'application d'un des théorèmes de De Morgan pour faire disparaître, suivant le cas, les signes « . » et « + ».
– La méthode graphique consiste à remplacer chaque opérateur par son équivalent réalisé avec le type de porte souhaité.
– Le circuit TTL 7451 (double opérateur ET-OU-NON) permet l'obtention des opérateurs logiques de base.

Algèbre de Boole

Vous connaissez maintenant les opérateurs de base et les équations logiques. Vous avez vu également comment assembler plusieurs portes dans le but d'obtenir des fonctions plus complexes.

Vous allez maintenant pratiquer ces fonctions afin de vous familiariser avec cette technique. Pour cela, le sujet d'aujourd'hui est l'algèbre logique (ou algèbre de Boole). Ce terme d'algèbre ne doit pas effrayer les débutants. Il s'agit en fait de quelques lois, très simples, faciles à appliquer, et que nous avons rassemblées sur un seul tableau (tableau I).

Ces quelques règles de l'algèbre de Boole se mettent facilement en évidence par la pratique. Les quatre premières concernent la fonction ET. Nous savons que celle-ci nous fait penser à un circuit comportant des interrupteurs en série. Ceux-ci doivent être tous à l'état 1 (donc fermé) pour obtenir l'état 1 (c'est-à-dire un signal) en sortie. Si ce réseau élémentaire comporte deux interrupteurs dont l'un reste en permanence fermé, il est évident que l'état de la sortie ne dépend que de l'autre interrupteur pouvant se fermer et s'ouvrir à volonté (règle n° 1). De même, si un de ces interrupteurs reste en permanence ouvert, sa sortie restera à l'état zéro (règle n° 2).

Quelles sont les conséquences pratiques de ces deux premières règles ? Si une des entrées d'un ET (7408) se trouve reliée au + 5 V, l'état de la sortie dépend uniquement de celui de la seconde entrée. Et si la première entrée est connectée au zéro volt, l'état de la sortie restera au niveau bas.

Pour la troisième relation les deux entrées sont reliées ensemble, ce qui est équivalent à deux interrupteurs commutés en même temps. L'état de la sortie est donné par X = A.

Toujours avec notre ana-

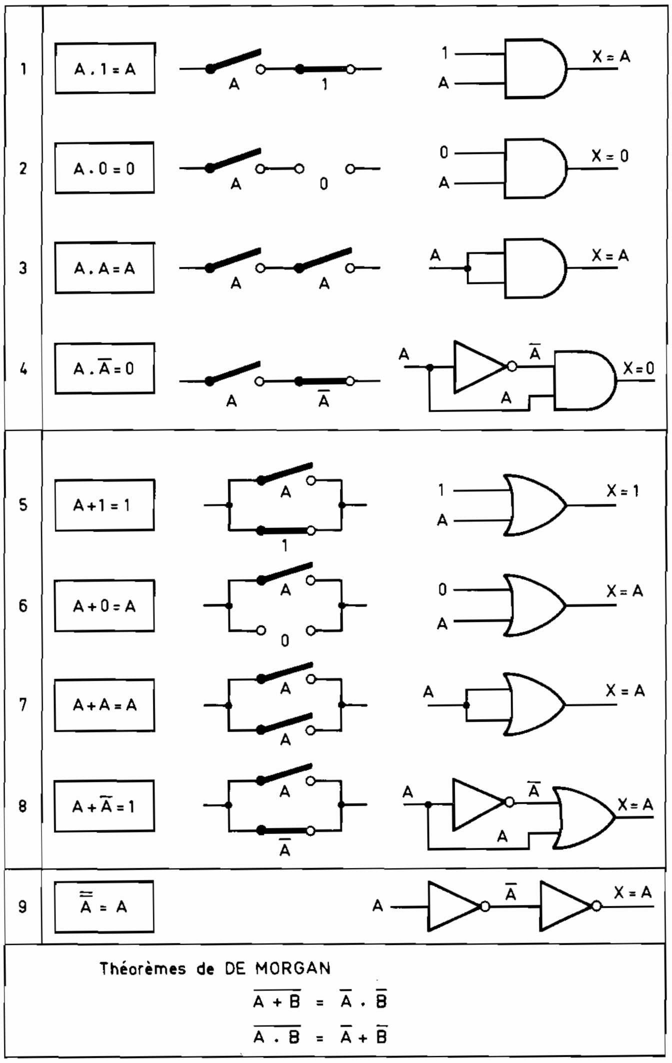

Tableau I

logie de deux interrupteurs en série, supposons que l'un de ceux-ci s'ouvre chaque fois que l'autre se ferme, ou inversement, la sortie reste toujours à l'état bas puisqu'il y a toujours un interrupteur ouvert (relation n° 4).

Si vous avez bien compris ces quatre premières règles, vous comprendrez aisément les quatre suivantes concernant la fonction OU.

Comme dans l'algèbre classique, on applique la mise en facteur pour la simplification des expressions logiques (loi distributive). Ainsi, pour :
$A + A . B$
nous pouvons mettre A en facteur, ce qui donne :
$A . (1 + B)$.
Mais comme $1 + B$ est égal à 1, nous pouvons remplacer $A + A . B$ par A. Pratiquement, cela veut dire que si nous avons une combinaison d'un OU et d'un ET donnant la fonction :
$X = A + A . B$ (fig. 1), nous pouvons tout simplement remplacer ces deux opérateurs par une liaison directe entre A et X.

De même, nous pouvons transformer une expression déjà mise en facteur par la loi distributive. Ainsi l'expression $A . (\overline{A} + B)$ donne $A . \overline{A} + A . B$ (loi associative). Or, nous savons que (règle 4) :
$A . \overline{A} = 0$. L'expression donnée devient alors $A . B$.

Nous vous conseillons de contrôler vous-même, expérimentalement, ces différentes étapes de calcul. Vous pouvez de même contrôler la relation :

$$\boxed{A + \overline{A}B = A + B}$$

relation très utile à connaître lorsqu'on manipule les circuits digitaux.

Théorèmes de De Morgan

Ces théorèmes, non plus, n'ont rien de sorcier. Ils permettent de passer d'une fonction ET à une fonction OU, et inversement.

Le premier de ces théorèmes s'écrit :
$\overline{A + B} = \overline{A} . \overline{B}$

Vous voyez que si, dans un calcul, vous avez une expression de la forme $\overline{A + B}$ (fonction NOR), vous pouvez la remplacer par $\overline{A} . \overline{B}$ équivalente à une fonction ET dont chaque membre est complémenté. En résumé, on peut « casser » la grande barre en deux en changeant également le signe de l'expression. Ici, le « + » est remplacé par un « . ». Les deux circuits logiques équivalents sont donnés sur la figure 2.

Grâce aux théorèmes de De Morgan, une simplification peut être effectuée très rapidement en logique.

Dans ces opérations de transformation, on se souviendra que deux négations sont égales à une affirmation (relation 9), ainsi il sera avantageux soit de supprimer deux barres superposées de même longueur, soit d'en ajouter. Voici un premier exemple :
$X = \overline{\overline{A + \overline{B}}}$, l'expression peut tout de suite être transformée en :
$X = A + \overline{B}$.
On aurait pu aussi appliquer le théorème de De Morgan, en cassant d'abord une grande barre et en changeant de signe, puis en cassant la deuxième en changeant encore de signe. Ceci donnerait une première transformation :
$X = \overline{\overline{A} . \overline{\overline{B}}}$. La cassure de la barre restante donne :
$X = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{\overline{B}}}$. Nous simplifions encore, et l'expression devient :
$X = A + \overline{B}$.

Deuxième exemple : nous avons la même relation ($X = A + \overline{B}$), que nous souhaitons voir réalisée avec des portes du type NAND. En rajoutant deux grandes barres superposées, nous obtenons l'expression équivalente :
$X = \overline{\overline{A + \overline{B}}}$
qui se transforme en :
$X = \overline{\overline{A} . \overline{\overline{B}}}$
puis en $X = \overline{\overline{A} . B}$
réalisable avec l'opérateur NAND (fig. 3).

De cette façon, il est possible d'obtenir les fonctions principales en n'utilisant qu'un seul type de porte.

Application au circuit XOR

Le mois dernier nous avions vu comment une fonction XOR pouvait être obtenue avec 4 opérateurs NAND (fig. 4), et nous avions donné la formule de cette fonction :
$X = A . \overline{B} + \overline{A} . B$

Nous pouvons maintenant, grâce à De Morgan, retrouver cette formule avec le circuit en question.

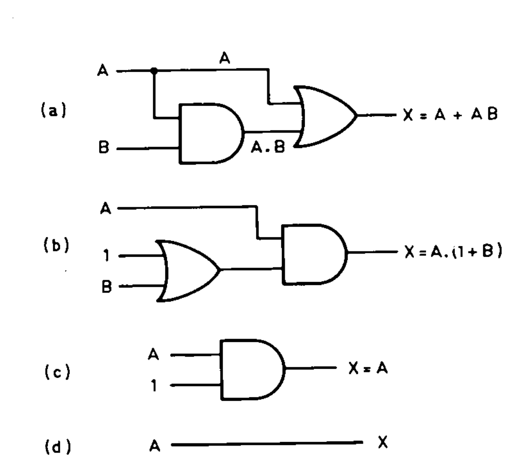

Fig. 1. – Le premier circuit (a) peut finalement être remplacé par une liaison directe entre A et X.

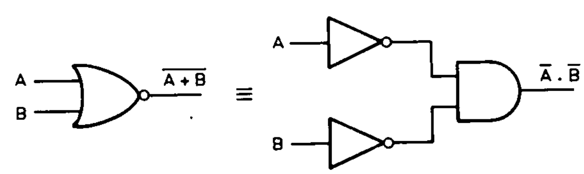

Fig. 2. – L'application d'un des théorèmes de De Morgan nous montre que les deux circuits ci-dessus sont équivalents.

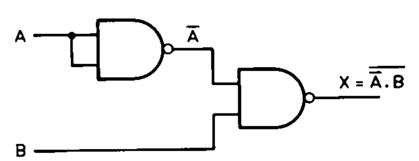

Fig. 3. – Le circuit représenté réalise la fonction $X = A + \overline{B}$.

A la sortie du NAND 1, nous avons $\overline{A . B}$, expression appliquée à une des entrées des deux portes 2 et 3. Ainsi, on trouve à la sortie de ces portes 2 et 3 respectivement :

$\overline{A . \overline{A . B}}$ et $\overline{B . \overline{A . B}}$

Ces deux résultats partiels se voient appliqués aux deux entrées du dernier NAND dont l'expression de sortie est alors :

$\overline{\overline{A . \overline{A . B}} . \overline{B . \overline{A . B}}}$

Première application des théorèmes de De Morgan :

$\overline{\overline{A . \overline{A . B}}} + \overline{\overline{B . \overline{A . B}}}$

Les deux grandes barres superposées de même longueur s'enlèvent, ce qui donne :

$A . \overline{A . B} + B . \overline{A . B}$

Cassons la barre au-dessus de A . B :

$A . (\overline{A} + \overline{B}) + B . (\overline{A} + \overline{B})$

Nous terminons avec l'utilisation de l'algèbre classique :

$A . \overline{A} + A . \overline{B} + B . \overline{A} + B . \overline{B}$

Mais nous savons que $A . \overline{A}$ ainsi que $B . \overline{B}$ sont égales à zéro. Il reste alors :

$X = A . \overline{B} + \overline{A} . B$

ce qu'il fallait démontrer...

Conversion des fonctions

Connaissant ces théorèmes et ces quelques règles d'algèbre de Boole, la conversion d'une fonction en une autre fonction devient une chose facile. Ceci est d'autant plus avantageux lorsqu'on ne tient à sa disposition que certaines fonctions intégrées.

Un exemple servira pour démontrer la simplicité du processus. Nous devons obtenir le circuit équivalent à la fonction :

$X = \overline{A} . \overline{B} + A . B$

mais n'avons à notre disposition que des portes NAND (7400). Pour cette transformation, nous pouvons utiliser la **méthode algébrique,** elle se décompose en deux temps.

Premièrement : utilisation des théorèmes de De Morgan.

Deuxièmement : on fait apparaître uniquement l'opérateur désiré.

Pour cet exemple, nous ferons avant tout disparaître le « + ». La relation peut donc s'écrire :

$\overline{\overline{\overline{A} . \overline{B} + A . B}}$

(double négation) puis :

$\overline{\overline{\overline{A} . \overline{B}} \cdot \overline{A . B}}$

(Th. de De Morgan), pouvant être réalisée avec 5 NAND à 2 entrées, soit 2 circuits 7400 (fig. 5)

Cette conversion peut être obtenue par un autre procédé : la **méthode graphique.** Elle se fait en 3 étapes. Premièrement : on dessine le circuit tel qu'il apparaît dans la formule. Deuxièmement, on transforme les ET, OU et inverseurs par leur équivalent réalisé avec l'opérateur désiré. Troisièmement, on enlève les groupes de deux inverseurs qui se suivent.

Pour cette méthode graphique, il faut se souvenir qu'une fonction ET est obtenue par un NAND suivi d'une négation, et qu'une fonction OU est égale à

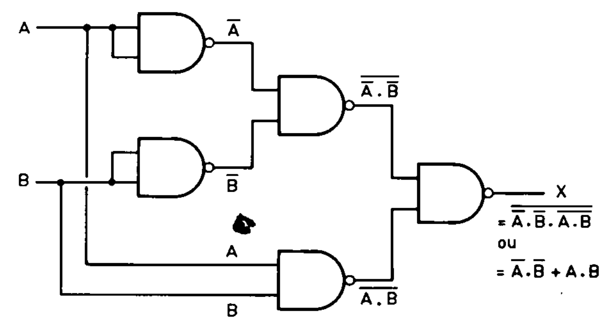

Fig. 5. – Réalisation de la fonction $X = \overline{A} . \overline{B} + A . B$ avec des circuits de type NAND.

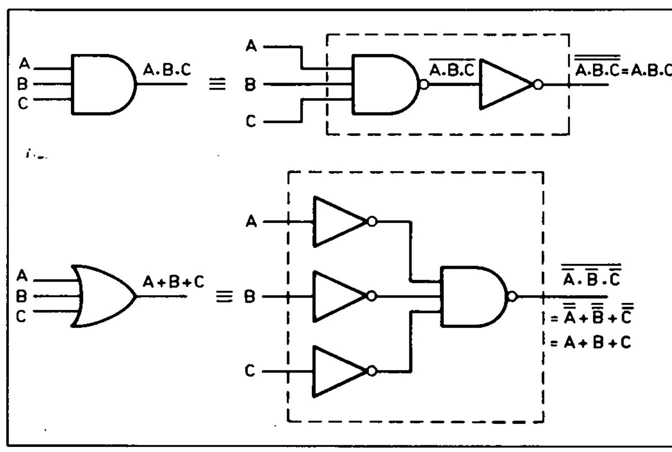

Tableau II

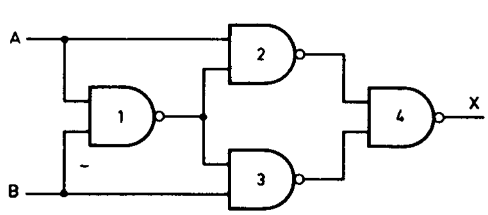

Fig. 4. – Circuit équivalent au OU EXCLUSIF.

l'inversion des entrées suivie d'un NAND, comme cela est montré sur le tableau II.

Les deux premières étapes de résolution graphique de notre exemple sont données sur la figure 6. En (a) apparaît le circuit correspondant à la formule donnée. Des opérateurs du type NAND et inverseur remplacent les opérateurs à supprimer (en (b)). Les deux inverseurs qui se suivent à l'entrée de la dernière porte peuvent être supprimés, et on retrouve le schéma final de la méthode graphique apparaissant sur la figure 5.

Pour récapituler, nous donnons sur le tableau III les différentes fonctions réalisées avec des NAND et des NOR.

Le 7451

Ce circuit intégré est très intéressant, c'est un double opérateur ET-OU-NON. Il permet par lui seul de donner les fonctions de base. Son schéma interne est donné figure 7.

Chaque opérateur est constitué par deux opérateurs ET à deux entrées suivis par un NOR (fig. 8). La fonction se présente sous la forme :

$X = \overline{AB + CD}$

ou

$X = \overline{A . B} . \overline{C . D}$.

Le schéma peut se décomposer comme sur la figure 8b pour faire apparaître les trois fonctions ET, OU et INVERSEUR.

Sur la figure 9, nous voyons d'abord (a) comment on obtient la fonction NAND. Les entrées C et D sont reliées à la masse (zéro logique) de telle sorte que le NOR trouve sur ses deux entrées d'une part A . B, et d'autre part zéro. En sortie, nous avons $\overline{A . B + 0}$, soit, en appliquant la règle 6, la fonction NAND : X = A . B.

En (b) les deux entrées de chaque ET sont reliées ensemble. A la sortie de chacune de ces portes, nous avons A . A et C . C, soit respectivement (règle 3) A et C, et à la sortie du NOR, nous obtenons la fonction NOR :

$X = \overline{A + C}$

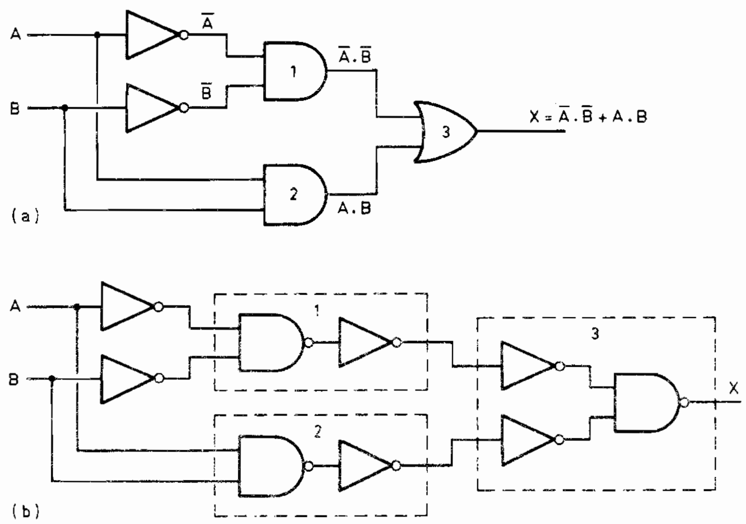

Fig. 6. – L'application de l'équation logique $X = \overline{A} . \overline{B} + A . B$ nous donne le schéma (a). En remplaçant les portes 1, 2 et 3 par leur équivalent « NAND », le schéma se transforme comme cela est montré en (b).

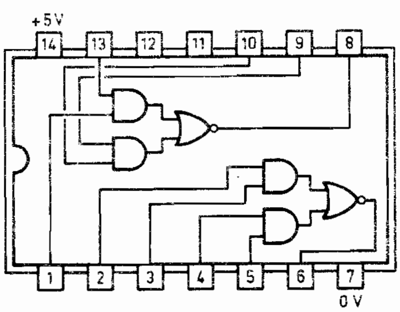

Fig. 7. – Schéma interne du 7451 (double opérateur ET-OU-NON).

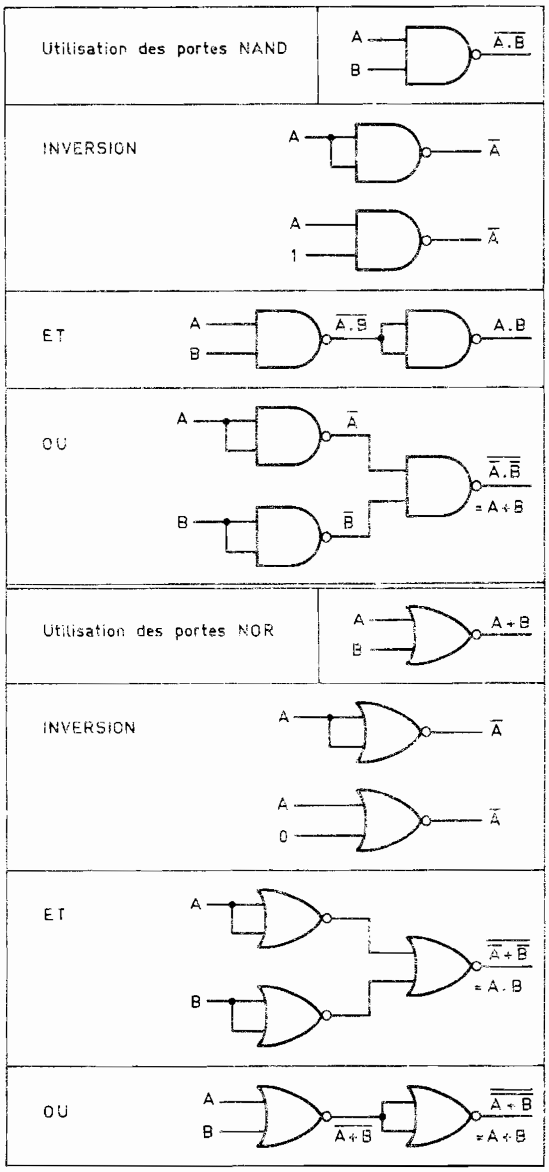

Tableau III

Enfin, en (c), nous sommes en présence d'un inverseur, la porte NOR reçoit d'une part A et d'autre part 0. Puisque $A + 0 = A$, la fonction réalisée est $X = \overline{A}$.

Si nous avions besoin d'un ET ou d'un OU, il suffirait tout simplement de faire suivre les montages (a) et (b) par un inverseur, lui-même câblé comme en (c).

Deux exercices

Si vous souhaitez appliquer ce qui a été traité aujourd'hui, nous vous proposons deux exercices dont nous vous donnerons la solution le mois prochain.

1° Réaliser avec des NOR la fonction :
$X = (\overline{A} + \overline{BC}) \cdot D$

2° Réaliser avec des ET la fonction
$X = \overline{A + \overline{B \cdot C} + \overline{C} \cdot D}$

Solution des exercices du mois dernier

Il s'agissait de réaliser avec des NAND le schéma de la figure 10a. La transformation est vraiment très simple, elle aura été comprise à la suite de l'exposé d'aujourd'hui. Les inverseurs 1 et 2 seront des NAND dont les entrées auront été reliées l'une à l'autre. L'ensemble des portes 3 et 4 seront composées avec un seul NAND à 2 entrées (fig. 10b).

Son équation logique est facilement obtenue en regardant le schéma :

$(X = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}})$.

Sa réalisation pratique est représentée sur la figure 11, elle ne nécessite qu'un seul 7400.

En ce qui concerne la table de vérité (fig. 12), elle est facile à établir, on s'aperçoit, en regardant la colonne X, que ce circuit est effectivement une fonction OU.

Si on ajoute à la suite un autre inverseur, on obtient évidemment la fonction NOR.

J.-P. B.

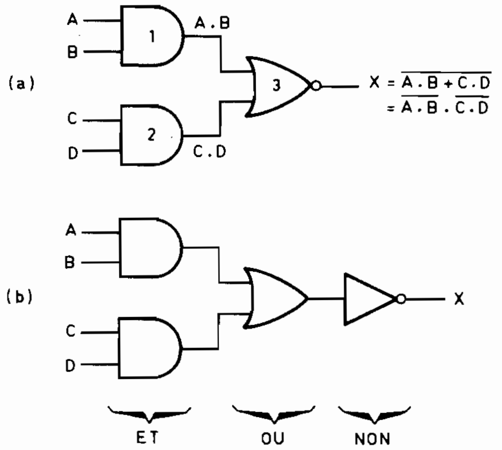

Fig. 8. – Schéma d'un opérateur ET-OU-NON (a). La décomposition de la porte 3 fait apparaître les trois fonctions.

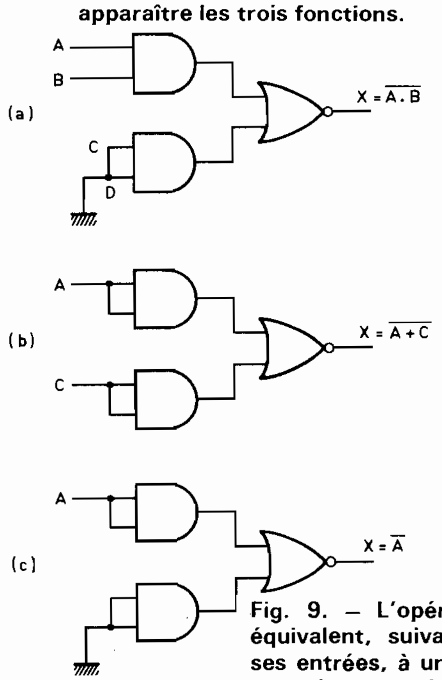

Fig. 9. – L'opérateur ET-OU-NON est équivalent, suivant le branchement de ses entrées, à un NAND (a), un NOR (b) ou un inverseur logique (c).

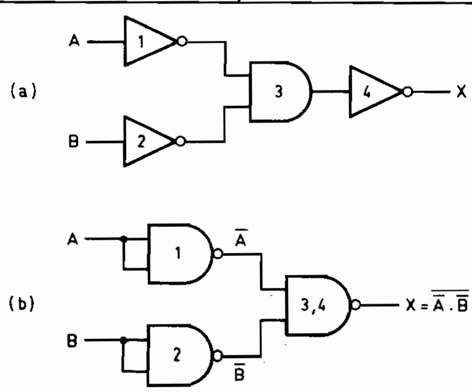

Fig. 10. – Le schéma (a) se transforme facilement en (b), circuit dans lequel seuls des NAND sont employées.

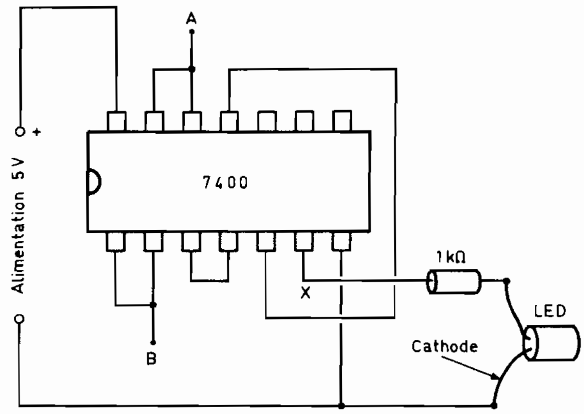

Fig. 11. – Réalisation pratique de la fonction $X = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$	$X = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

Fig. 12. – Table de vérité détaillée de la fonction $X = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$