FORMULAIRE D'ELECTRONIQUE

CIRCUITS INDUCTIFS EN CONTINU

Inductance d'une bobine

Une bobine est caractérisée par son inductance dont l'unité est le henry (H).

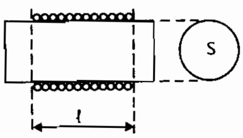
L'inductance d'une bobine sans noyau dépend de trois facteurs :

– le perméabilité absolue μ,
– la section de la bobine S,
– la longueur de la bobine ℓ,

La formule théorique est :

$$L = \frac{\mu S}{\ell}$$

L = inductance de la bobine (en henrys)
μ = perméabilité (= $1{,}257 \times 10^{-8}$ pour l'air)
S = section de la bobine (en m^2)
ℓ = longueur de la bobine (en m) (fig. 1).



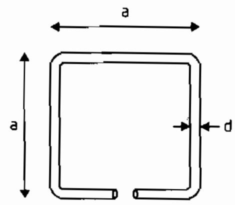
Une formule plus complète, pour une bobine de n spires avec un noyau magnétique de perméabilité μ_r, est donnée ci-dessous :

$$L = \frac{1{,}257 \times 10^{-8}\, \mu_r\, S\, n^2}{\ell}$$

Les unités sont les mêmes que pour la formule précédente. La perméabilité μ_r du noyau magnétique n'étant pas linéaire et dépendant du courant dans la bobine, il n'est pas possible de présenter un tableau avec la valeur de μ_r pour différents corps.

L'inductance d'une spire carrée (fig. 2) est donnée par la formule :

$$L = 0{,}0184\, a \left(\ell g\, \frac{2a}{d} - 0{,}33\right)$$



L = inductance de la spire (en μH)
a = longueur d'un côté (en cm)
d = diamètre du conducteur (en cm)
ℓg = logarithme décimal.

Exemple : Une spire cassée est constituée par du fil de cuivre de 3 mm de diamètre et dont la longueur des côtés est de 30 cm.

La valeur de son inductance est :

$$L = 0{,}0184 \times 30 \times \left(\ell g\, \frac{60}{0{,}3} - 0{,}33\right) \simeq 1{,}1\ \mu H$$

Inductance d'une bobine à une seule couche

Si la longueur de la bobine est supérieure à deux fois le diamètre, la formule est :

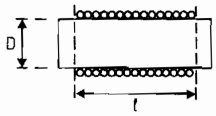
$$L = \frac{D^2 n^2}{46\,D + 100\,\ell}$$

Si la longueur de la bobine est inférieure à deux fois le diamètre, la formule est :

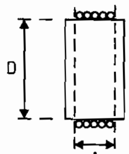
$$L = \frac{D^2 n^2}{40\,D + 112\,\ell}$$

avec :

L = inductance de la bobine (en μH)
D = diamètre de la bobine (en cm)
ℓ = longueur de la bobine (en cm)
n = nombre de spires.



$\ell > 2D$



$\ell < 2D$

Exemples :

1° Quelle est l'inductance d'une bobine à air dont le diamètre est 3 cm, la longueur du bobinage 5 mm et comportant 10 spires. La longueur de la bobine étant inférieure à deux fois le diamètre, nous utilisons la deuxième formule.

$$L = \frac{(3)^2 \times (10)^2}{(40 \times 3) + (112 \times 0{,}5)} = \frac{900}{176} = 5{,}11\,\mu H$$

2° Nous avons un mandrin dont le diamètre est de 10 mm et la longueur 6 cm. Quel doit être le nombre de spires pour obtenir une inductance de 13,5 μH (bobine à air) ? On utilisera la première formule en tablant sur une longueur ℓ égale à 5 cm.

$$n = \frac{\sqrt{L\,(46\,D + 100\,\ell)}}{D}$$

$$= \frac{\sqrt{13{,}5\,[(46 \times 1) + (100 \times 5)]}}{1}$$

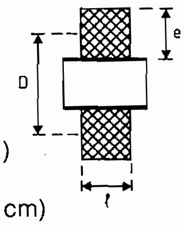
$\simeq$ 86 spires.

Inductance d'une bobine à plusieurs couches

La formule est :

$$L = \frac{D^2 n^2}{38\,D + 112\,\ell + 124\,e}$$

L = inductance de la bobine (en μH)
D = diamètre moyen de la bobine (en cm)
l = longueur de la bobine (en cm)
e = épaisseur de la couche de spires (en cm)



Exemple : Une bobine à plusieurs couches comporte 150 spires, les dimensions sont les suivantes : D = 2 cm, e = 1 cm et ℓ = 1 cm.

La bobine, qui est « à air » à une inductance de :

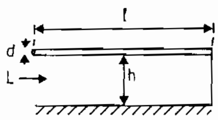
$$L = \frac{(2)^2 \times (150)^2}{(38 \times 2) + (112 \times 1) + (124 \times 1)}$$

soit 288 μH.

Inductance d'une ligne

L'inductance d'un fil métallique (fig. 5) est donnée par la formule :

$$L = 0{,}46 \left(\ell g\,\frac{4\,h}{d}\right) \times \ell$$



L = inductance de la ligne (en μH)
ℓ = longueur de la ligne (en m)
d = diamètre du fil métallique
h = distance entre le fil et la masse.

Remarques :

a) *d et h doivent être exprimées par les mêmes unités* (centimètre ou millimètre) ;

b) ℓg signifie qu'il faut prendre le **logarithme décimal** de **4 h/d** (ne pas utiliser la touche ℓn d'une calculatrice) ;

c) si l'on désire l'inductance par mètre d'une ligne, il suffit de supprimer l dans la formule ci-dessus.

Exemple : Nous avons un câble de 10 m de long, de 2 mm de diamètre et distant de 10 cm d'une masse métallique. Pour connaître l'inductance du câble nous devons d'abord calculer 4 h/d en utilisant les mêmes unités, soit : h = 100 mm et d = 2 mm, ce qui donne : 4 h/d = 200, dont le logarithme décimal est 2,3. On calcule ensuite : L = 0,46 × 2,3 × 10 = 10,58 μH. L'inductance par mètre est : L = 0,46 × 2,3, soit 1,058 μH/m.

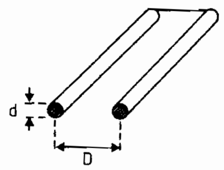
Inductance d'un câble bipolaire

L'inductance est donnée par la formule :

$$L = 0{,}92 \left(\ell g \frac{2\,D}{d}\right) \times \ell$$

L = inductance de la ligne bipolaire (en μH)
ℓ = longueur de la ligne (en m)
D = distance entre les centres des deux conducteurs
d = diamètre du fil.

(Mêmes remarques que pour l'inductance d'une ligne.)



Exemple : Quelle est l'inductance par mètre d'un câble bipolaire dont les caractéristiques sont : d = 1 mm et D = 1 cm ?

$L = 0{,}92 \times \ell g\ 20 = 1{,}19\ \mu H/m$.

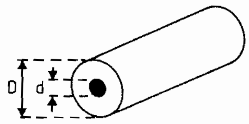
Inductance d'un câble coaxial

Elle est donnée par la formule :

$$L = 0{,}46 \left(\ell g \frac{D}{d}\right) \times \ell$$

L = inductance du câble (en μH)
D = diamètre intérieur de la gaine métallique
d = diamètre du conducteur interne
ℓ = longueur du câble (en m).

(Mêmes remarques que pour l'inductance d'une ligne.)



Exemple : Si d = 1 mm et D = 1 cm, l'inductance par mètre du câble est : $0{,}46 \times \ell g\ 10 = 0{,}46\ \mu H/m$.

Energie emmagasinée

L'énergie emmagasinée dans une inductance est donnée par la relation :

$$W = \frac{1}{2}\,L\,I^2$$

W = énergie (en joules)
L = inductance de la bobine (en henrys)
I = courant traversant la bobine (en ampères).

Exemple : Quelle est la valeur de l'énergie emmagasinée dans une inductance de 0,2 H traversée par un courant continu de 0,5 A ?

$$W = \frac{1}{2} \times 0{,}2 \times (0{,}5)^2 \text{ soit } 0{,}025\ J.$$

Force électromotrice d'auto-induction d'une bobine

Une variation de courant dans une inductance entraîne aux bornes de celle-ci une tension égale à :

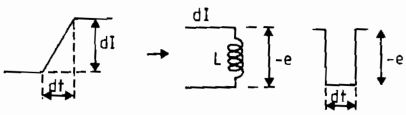
$$e = -L\,\frac{dI}{dt}$$

e = tension aux bornes de l'inductance (en volts)
L = inductance (en henrys)
dI/dt = vitesse de variation du courant (en ampères par seconde).

Exemple : Quelle est la valeur de la tension qui apparaît aux bornes d'une bobine de 0,2 H traversée par un courant subissant une augmentation de 0,5 A pendant 10 ms (fig. 8).

La tension apparaît sous forme d'impulsion de durée égale à 10 ms et d'amplitude dont la valeur est :

$$e = -0{,}2 \times \frac{0{,}5}{10 \times 10^{-3}} = -10\ V \text{ (impulsion négative).}$$



Constante de temps des circuits inductifs

La constante de temps d'un circuit RL est définie par la relation :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

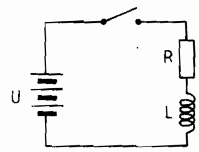
avec :
τ = constante de temps du circuit (en secondes)
R = résistance du circuit (en ohms)
L = inductance de la bobine (en henrys).

Dans le cas de l'établissement d'un courant, τ indique le temps nécessaire pour que le courant dans la bobine atteigne 63 % de la valeur maximale du courant (valeur finale) dans le circuit.

Dans le cas d'une coupure, τ indique le temps nécessaire pour que le courant dans la bobine diminue jusqu'à 37 % de la valeur du courant initial.

Exemple : Une inductance L de 3 H est connectée à une tension U de 12 V à travers une résistance R de 10 Ω (fig. 9). La constante de temps est de : 3/10 = 0,3 s (ou 300 ms). La valeur finale du courant est :

$$I = \frac{U}{R} = \frac{12}{10} = 1{,}2\ \text{A.}$$



Au bout d'un temps égal à 0,3 s, le courant dans le circuit est : 1,2 × 0,63 = 0,756 A.

Etablissement du courant dans la bobine

La valeur de ce courant est donnée par la formule :

$$I_L = \frac{U}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

avec :
I_L = courant dans la bobine à l'instant t (en ampères)
U = tension appliquée au circuit LC (en volts)
R = résistance du circuit (en ohms)
t = temps pour lequel le calcul est fait (en secondes)
τ = constante de temps du circuit (en seconde)
e = base de logarithmes népériens (= 2,718).
(On utilise la touche e^x d'une calculatrice.)

Remarque : Au bout d'un temps égal à 5 τ, la bobine est traversée par un courant de valeur très proche de U/R.

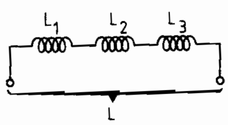
Exemple : Pour un circuit RL de constante de temps égale à 10 ms, quel est le courant dans la bobine au bout de 5 ms sachant que la tension U = 20 V et R = 5 kΩ ?

$$I_L = \frac{20}{5 \times 10^3}(1 - e^{-5/10}),\ \text{soit } 4\ (1 - 0{,}6) \times 10^{-3}\ \text{A}$$
$$= 1{,}6\ \text{mA}$$

Branchement des inductances (sans couplage)

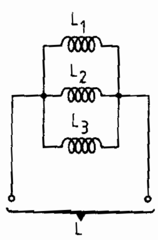
S'il s'agit d'un branchement **série** de trois inductances sans couplage entre elles (fig. 12), l'inductance totale est :

$$L = L_1 + L_2 + L_3$$



Dans le cas d'un branchement **parallèle** de trois inductances, également sans couplage (fig. 13), l'inductance résultante est :

$$L = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}}$$



Pour deux bobines en parallèle, la formule devient :

$$L = \frac{L_1 \times L_2}{L_1 + L_2}$$

Diminution du courant dans la bobine

Le courant de décharge est donné par la formule :

$I_L = I\,(e^{-t/\tau})$

Les variables sont les mêmes que pour l'établissement du courant sauf :

I_L = courant de décharge (en ampères)
I = valeur du courant initial (en ampères).

Le courant I est le courant en fin d'établissement (= U/R).

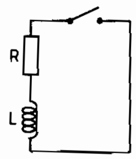
Remarque : Au bout d'un temps égal à 5 τ, le courant a pratiquement complètement disparu.

Pour simplifier les calculs de charge et de décharge, on utilisera les courbes données dans *Le Haut-Parleur* de mars 1986 (n° 1726) à la page 91. La courbe 1 correspond à l'établissement du courant dans la bobine, et la courbe 2 à sa disparition. En ordonnées, nous avons le pourcentage du rapport I_L/I. Le courant I est soit le courant initial (s'il s'agit d'une décharge), soit le courant égal à U/R (dans le cas de l'établissement d'un courant dans la bobine).

Exemple : Nous avons un circuit identique au schéma de la figure 10. Les valeurs des composants sont les suivantes : L = 10 H, R = 200 Ω et U = 10 V. Au bout de combien de temps atteindra-t-il 30 mA ?

La constante de temps du circuit est : 10/200, soit 50×10^{-3} s. Le courant en fin d'établissement est :

$I = \frac{U}{R} = \frac{10}{200} = 0{,}05$ A ou 50 mA.



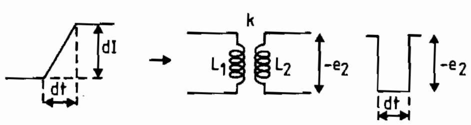
Le rapport I_r/I est donc égal à :

$\frac{30}{50} = 0{,}6$ soit 60 %.

D'après la courbe, nous voyons que le temps sera égal à 0,5 τ, soit, dans notre cas, $0{,}5 \times 50 \times 10^{-3}$ ou 25 ms.

Induction mutuelle

Il existe une interaction entre deux bobines voisines l'une de l'autre. Une variation de courant dans L_1 induit une tension aux bornes de L_2 (fig. 11). L'induction mutuelle est définie par la formule :



$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

M = induction mutuelle entre les deux enroulements
L_1 = inductance de l'un des enroulements
L_2 = inductance de l'autre enroulement
R = coefficient de couplage entre L_1 et L_2.

(k n'est jamais supérieur à 1.)

M, L_1 et L_2 sont exprimés par des unités identiques (H, mH, µH...).

La tension induite dans un enroulement, lorsque l'autre est le siège d'une variation de courant, est donnée par la formule :

$$e_2 = -M\,\frac{dI_1}{dt}$$

avec :
e_2 = tension aux bornes de L_2 (en volts)
M = induction mutuelle entre L_1 et L_2 (en henrys)
dI_1/dt = vitesse de variation du courant dans L_1 (en ampères par seconde).

Exemples :

1° Deux bobinages d'inductance identique ($L_1 = L_2 = 100$ mH) ont un coefficient de couplage k égal à 15 %. Quelle est la valeur de M ?

$M = 0{,}15 \times \sqrt{100 \times 100} = 15$ mH

2° Deux bobinages ont une induction mutuelle M de 220 µs. Le courant de L_1 diminue de 3,3 A en 7 µs. Quelle est la tension à ce moment aux bornes de L_2 ?

On obtient une impulsion positive de durée égale à 7 ms et d'amplitude de :

$$-(220 \times 10^{-6}) \times \frac{(-3{,}3)}{(7 \times 10^{-6})}$$

soit + 103,7 V.

Branchement des inductances (avec couplage)

La formule pour un branchement série est :

$L = L_1 + L_2 \pm 2\,M$

Pour un branchement parallèle, également pour deux bobines :

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2\,M}$$

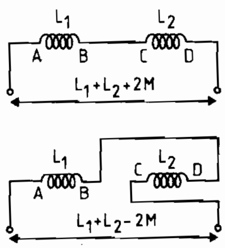
(L, L_1, L_2 et M sont exprimés par des unités identiques.)

Exemples :

1° Nous avons deux enroulements bobinés sur le même circuit magnétique. Les inductances sont
$L_1 = 5$ H, $L_2 = 15$ H et $k = 0{,}95$.
Calculer l'inductance résultante si on met les bobines en série, puis en parallèle.

Puisqu'il y a couplage, nous aurons deux valeurs possibles pour chaque branchement. L'inductance mutuelle est $0{,}95\sqrt{15 \times 5} = 8{,}22$ H.

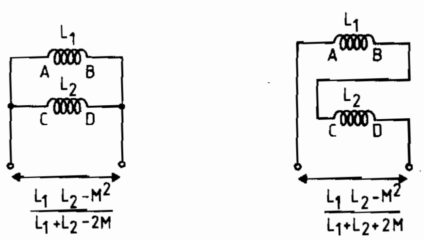
Branchés en série, nous obtenons deux valeurs suivant le sens de branchement des bobines (fig. 14).



Dans un cas, l'inductance est égale à
$L_1 + L_2 + 2\,M$, soit $5 + 15 + 2\,(8{,}22) = 36{,}44$ H.

Dans l'autre cas, l'inductance résultante a pour valeur $L_1 + L_2 - 2\,M$, soit $5 + 15 - 2\,(8{,}22) = 3{,}56$ H.

Le branchement en parallèle (fig. 15) donne également deux valeurs :



$$\frac{L_1 + L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2\,M}$$

soit :

$$\frac{5 + 15 - (8{,}22)^2}{5 + 15 + 2\,(8{,}22)} = \frac{-47{,}57}{36{,}44} = 1{,}3 \text{ H}$$

(On néglige le signe moins.)

Le deuxième branchement donne :

$$\frac{L_1 + L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2\,M} = \frac{-47{,}57}{3{,}56} = 13{,}36 \text{ H.}$$

2° Nous avons deux bobines dont nous voulons connaître M et k. Branchés en série, nous mesurons soit 450 μH, soit 130 μH en inversant le branchement d'une des bobines par rapport à l'autre. Autrement dit :

$L_1 + L_2 + 2\,M = 450\ \mu$H (1re mesure)
$L_1 + L_2 - 2\,M = 130\ \mu$H (2e mesure).

En isolant $L_1 + L_2$, nous obtenons :

$L_1 + L_2 = 450 - 2\,M$
$L_1 + L_2 = 130 + 2\,M$.

Nous trouverons M en posant :

$450 - 2\,M = 130 + 2M$

ce qui donne :

$450 - 130 = 2\,M + 2\,M = 4\,M$

et $M = \dfrac{450 - 130}{4} = 80\ \mu$H.

La valeur de k est trouvée en utilisant la formule de l'induction mutuelle :

$$R = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{80}{\sqrt{450 \times 130}}$$

$= 0{,}33$ (33 %).

Erratum

Une erreur s'est glissée dans le paragraphe « Décharge d'un condensateur » du Formulaire paru dans le numéro de mars 1986. Il faut lire :

$V_c = U\,e^{-t/\tau}$ et non $V_c = U - (e^{t/\tau})$.

J.-B. P.