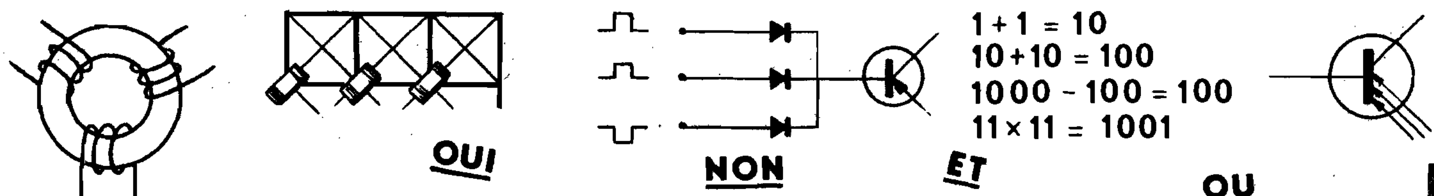

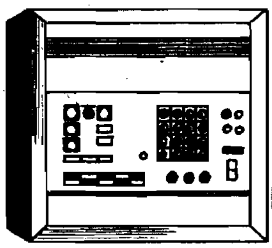

INITIATION AU CALCUL ELECTRONIQUE

La numération binaire

Dans la précédente étude on a donné la définition des nombres binaires qui ne comportent que deux chiffres : 0 et 1. On a montré que la numération binaire est un cas particulier parmi l'infinité de systèmes de numérations dont la numération décimale est un autre cas particulier, connu de tous.

On a vu que le mode de constitution d'un nombre binaire est le même que celui des nombres décimaux mais où 2 remplace 10.

Il est bon de remarquer que dans l'expression d'un nombre binaire tel que, par exemple M = 10100 (20 en décimal) et dont la valeur est :

$$M = 1 . 2^4 + 0 . 2^3 + 1 . 2^2 + 0 . 2^1 + 0 . 2^0$$

ou plus simplement :

$$M = 2^4 + 2^2$$

L'emploi d'expressions de puissances de 2 avec exposants décimaux (2, 4...) ne prête pas à confusion car il n'y a pas de 2, 4... dans la numération binaire.

Au contraire, dans une expression de nombre décimal, **il ne faut pas** utiliser des nombres binaires tels que 10, 11, 100, etc., qui ont en binaire une autre valeur absolue qu'en décimal.

Après avoir indiqué les méthodes d'addition et de soustraction des nombres binaires, passons à leur multiplication, qui ne présente aucune difficulté.

MULTIPLICATION DES NOMBRES BINAIRES

Comme en numération décimale, la multiplication en numération binaire consiste en multiplications partielles et une addition des nombres obtenus.

Une simplification est apportée par le fait que l'on a toujours affaire à quatre cas :

$$0 . 0 = 0$$
$$0 . 1 = 0$$
$$1 . 0 = 0$$
$$1 . 1 = 1$$

donc, quelle que soit la « complication » des deux nombres binaires à multiplier, les produits partiels seront :

1° La **reproduction exacte** du multiplicande si celui-ci est à multiplier par 1.

2° Zéro s'il est à multiplier par zéro.

Exemple. Soit à multiplier **treize** par **quinze** (il est entendu que treize veut toujours dire 13 décimal et quinze est l'expression du 15 décimal).

On a : 13 décimal = M = 1101 binaire
15 décimal = N = 1111 binaire.

Multiplions 15 par 13 : L'opération s'écrit de la manière habituelle :

```
    1111 (quinze)
    1101 (treize)
   -----
    1111
   0000
  1111
 1111
--------
11000011
```

Le produit partiel 0000 peut être supprimé du calcul mais il ne faut pas oublier **de décaler** le produit partiel suivant de deux rangs vers la gauche (le sien et celui du produit 0 supprimé) ce qui donne :

```
    1111
    1101
   -----
    1111
  1111
 1111
--------
11000011
```

A titre d'exercice vérifions encore que ce produit exprimé en binaire vaut bien 13 . 15 = 195 décimal.

Soit P = 11000011. Selon la règle énoncée précédemment on a :

$$P = 2^7 + 2^6 + 2^1 + 2^0$$

ce qui donne :

$$P = 128 + 64 + 2 + 1$$

ou P = 195 décimal

Lorsque les nombres binaires comportent des parties fractionnaires **binaires** (c'est-à-dire des virgules !) l'opération-produit s'effectue de la même manière en plaçant sur le produit obtenu, la virgule en comptant autant de chiffres qu'il y en a dans les deux nombres à multiplier, à la suite des virgules.

Exemple. Soit à multiplier M = 101,1 par N = 1,11. Le produit est P = M . N.

On commencera par multiplier M' = 1011 par N' = 111, ce qui donnera un produit P' = M' . N'.

Ce produit est un nombre entier.

La virgule se trouvera à 2 + 1 = 3 chiffres de droite à gauche.

L'opération s'effectue comme suit :

```
  M'.N'
   1011
    111
  -----
   1011
  1011
 1011
-------
1001101
```

donc P' = 1001 101 et P = 1001,101

Vérifions cette multiplication :

On a :

M = 101,1 en binaire

donc, en décimal

$$M = 2^2 + 2^0 + 2^{-1}$$
$$= 4 + 1 + 0,5 = 5,5$$

N = 1,11 en binaire

donc, en décimal

$$N = 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2}$$
$$= 1 + 0,5 + 0,25 = 1,75$$

Le produit P exprimé en numération décimale est :

```
 1,75
  5,5
-----
  875
 875
-----
9,625
```

Vérifions que le nombre binaire

P = 1001,101

est égal, en décimal à 9,625.

En effet, on a :

$$P = 2^3 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3}$$

ou $P = 8 + 1 + 0,5 + 0,125$

ce qui donne bien P = 9,625.

Rappelons les valeurs des puissances négatives de 2.

On a :

$$2^0 = 1, \quad 2^{-1} = 1/2^1 = 1/2 = 0,5 ;$$
$$2^{-2} = 1/2^2 = 1/4 = 0,25 ;$$
$$2^{-3} = 1/2^3 = 1/8 = 0,125$$

et d'une manière générale :

$$2^{-n} = 1/2^n.$$

Pour obtenir l'expression décimale de 2^{-n}, on divise 1 par 2^n après avoir calculé 2^n qui est 2 multiplié par lui-même *n* fois.

LES ENSEMBLES

Lorsqu'on groupe matériellement ou par la pensée des éléments qui présentent une propriété ou une caractéristique commune on constitue un **ensemble.**

Les **éléments** d'un ensemble peuvent être de nature quelconque : êtres vivants, objets, nombres, idées, etc. En voici quelques exemples.

Exemple 1. Dans une salle se trouvent 20 personnes, 2 chiens, 1 chat et 10 parapluies.

On peut dire qu'il y a 33 éléments dans cette salle.

Pour en constituer un ensemble il faut leur trouver des caractéristiques communes.

Ainsi, si l'on considère les êtres vivants, l'**ensemble** de ces êtres est : 20 (personnes) + 1 (chat) = 23 éléments. Supposons que 9 personnes sont habillées en noir, 5 en gris, qu'un chien est noir, que le chat est gris et que 5 parapluies sont noirs et 5 sont rouges.

L'ensemble des éléments **noirs** est composé :s éléments suivants : 9 (personnes) 1 (chien) + 5 (parapluies) = 15 éléments. elui des éléments gris est : 5 (personnes) 1 (chat) = 6 éléments.

L'ensemble des éléments rouges est composé : 5 parapluies.

L'ensemble des éléments **qui ne sont pas** ›uges (on dit en langage plus spécialisé : **on rouges**) se compose des 20 personnes, chiens, 1 chat et 5 parapluies, ce qui donne n ensemble de 28 éléments.

Voici des ensembles d'éléments abstraits.

On effectue un sondage concernant l'opi- ion du public sur un sujet quelconque. On btient les résultats suivants : 2.000 « oui », .000 « non » et 500 « pas d'opinion ».

L'ensemble des « oui » comprend 2.000 élé- nents.

L'ensemble des « non » comprend 1.000 élé- nents.

L'ensemble des « pas d'opinion » est de 500 éléments.

L'ensemble de réponses **précises** est de 3.000 éléments.

L'ensemble des réponses **qui ne sont pas** oui est de 1.500 éléments.

Lorsqu'on considère une collection de lampes et de transistors où tous les éléments ont été mélangés par accident, le propriétaire de la collection voudra ranger à nouveau ses éléments. Il constituera des ensembles pour faciliter ce rangement.

Le **tout** forme un ensemble d'éléments que nous nommerons « tubes » (lampes + transistors) (Fig. 1 A).

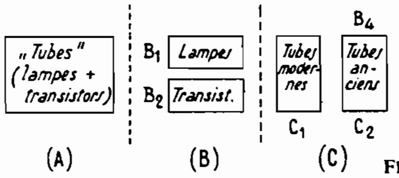

FIG. 1

Deux ensembles peuvent être réalisés en distinguant celui des lampes et celui des transistors (Fig. 1 B).

Un autre mode de groupement peut être envisagé : « tubes » modernes et « tubes » anciens (Fig. 1 C).

On voit immédiatement que les deux ensembles B_1 B_2 et les deux ensembles C_1 C_2 présentent entre eux des caractéristiques communes.

Ainsi, parmi les transistors et les lampes, il y en a qui sont tous anciens. Ceci peut être représenté graphiquement comme le montre la figure 2 A.

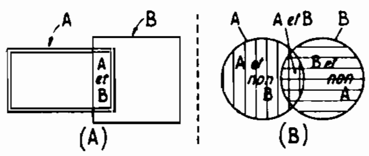

FIG. 2

Le rectangle A représente **toutes** les lampes, le rectangle B tous les transistors et la partie commune à A et B représente les lampes et les transistors **anciens.**

La même représentation graphique est indiquée en figure 2 B sous forme de cercles délimitant ces ensembles. Dans la partie commune de A et B les deux ensembles A et B possèdent une propriété commune.

Ce genre de représentations graphiques conduit à un système de logique dit **logique graphique.**

Revenons au graphique de la figure 2 B. On peut distinguer les ensembles suivants :

1° A et B : ensemble des tubes : lampes modernes, lampes anciennes, transistors modernes et transistors anciens.

2° A et **non** B : partie de A non commune avec B. Elle représente les lampes modernes uniquement car les transistors sont en B et les lampes anciennes dont dans la partie commune A et B.

3° Non A et B (ou B et non A) : partie de B non commune avec A. Elle représente les transistors modernes.

4° Non A et non B ou **ni** A et **ni** B : c'est l'aire extérieure aux cercles A et B (ni lampes ni transistors).

5° Non (A et B). Il s'agit des parties des deux cercles ne faisant pas partie de celle notée A et B.

Dans notre exemple : tous les « tubes » modernes, la représentation du cas 4° « ni A ni B » peut être aussi celle de la figure 3 où un cercle C entoure les cercles A et B.

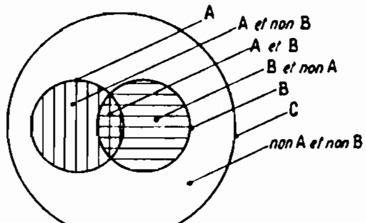

FIG. 3

Supposons que le cercle C désigne « tubes » (autres que les diodes) + diodes.

Dans la partie non A et non B (ni A ni B) ne se trouvent évidemment que des diodes et celles-ci n'existent pas dans A et dans B.

On a montré ainsi l'emploi des termes ET et NON.

Il existe aussi l'emploi du terme OU (dans le sens de distinction l'un OU l'autre).

Ainsi, si l'on se reporte à la figure 3, on peut aussi distinguer des catégories particulières mais indiquons qu'il y a deux sortes de OU :

Le OU inclusif : A ou B et A et B.

Le OU exclusif : A ou B seulement.

Sur la figure 3 la partie doublement hachurée (A et B) peut comporter des éléments A (lampes) et des éléments B (transistors) tous anciens. Donc un élément de cette partie est A ou B. Il ne peut pas être **à la fois** A (lampe) et B (transistor). Il s'agit donc d'un OU exclusif. Par contre, si l'on considère l'élément comme « tube », il est à la fois A et B car dans A et B il y a des « tubes ».

Désignons par T ce qui est à la fois A et B et désignons par 1 ce qui est **vrai** et par 0 ce qui est faux.

Etablissons le tableau ci-dessous :

Tableau 1.

	A	B	T	
(a)	0	0	0	A et B = T.
(b)	0	1	0	
(c)	1	0	0	
(d)	1	1	1	

Dans la ligne (a) un certain élément n'est pas A donc nous écrirons 0. Il n'est pas non plus B donc, encore 0.

Il en résulte que T n'est ni A ni B donc on peut écrire 0 pour T (T n'est ni lampe ni transistor dans le cas de notre exemple).

Dans la ligne (b) l'élément est un transistor donc on peut mettre 0 dans la colonne A et 1 dans la colonne B. Comme T = A et B, T doit être désigné par 0 car l'élément ne peut pas être lampe et transistor à la fois.

Il en est de même dans la ligne (c).

Dans la ligne (d), l'élément est considéré comme un tube (tube = lampe ou transistor) donc on peut écrire 1 et 1 dans **les deux** colonnes et aussi 1 dans la colonne **des T.**

Dans les 4 cas, il est possible **d'utiliser** une écriture symbolique utilisant le signe de multiplication habituel mais n'ayant pas **la** signification adoptée en mathématiques classiques.

En revenant au tableau I où

A et B = T

on peut écrire A . B = T.

ce qui donne pour les 4 lignes du tableau

(a) $0 . 0 = 0$
(b) $0 . 1 = 0$
(c) $1 . 0 = 0$
(d) $1 . 1 = 1$

où, en fait le signe « . » remplace « ET ».

Ceci nous conduit vers l'algèbre de Boole dont nous donnerons, par la suite, quelques indications.