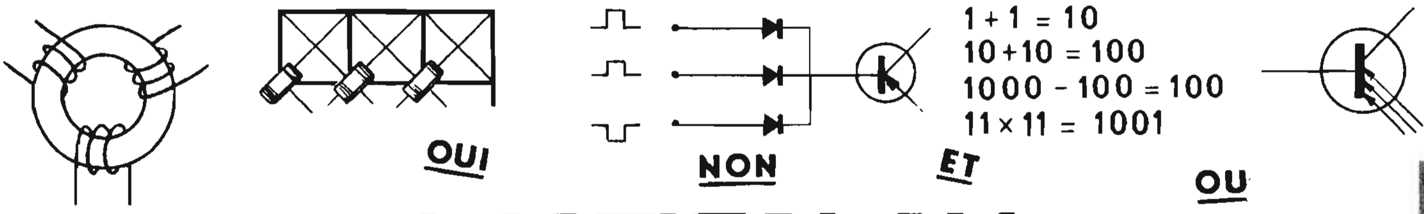
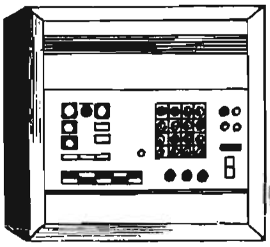




INITIATION AU CALCUL ELECTRONIQUE

LE CALCUL ANALOGIQUE

Les « machines mathématiques » peuvent être classées en deux grandes catégories, selon leur mode de fonctionnement. La première concerne les machines à traitement séquentiel d'informations discrètes ; ce sont les ordinateurs, dans lesquels les informations sont codées au moyen de bits 1 ou 0.

La seconde classe de machines mathématiques englobe les machines à traitement continu et parallèle d'informations, elles-mêmes continues : ce sont les machines analogiques.

Ces deux moyens de calcul ne sont d'ailleurs pas concurrents, mais complémentaires : les machines analogiques sont particulièrement bien adaptées à la résolution des équations différentielles et intégrales, et des systèmes différentiels d'ordre élevé ; leur emploi est prépondérant dans les études de dynamique de systèmes physiques.

Dès 1620...

Il est difficile de savoir à quelle époque l'homme a commencé à faire appel à des dispositifs physiques pour analyser les phénomènes ou mesurer des grandeurs physiques. La majorité des auteurs considèrent que la règle à calculs de GUNTHER, réalisée en 1620, est le premier véritable calculateur analogique, par opposition à la machine de PASCAL, premier calculateur numérique, fabriqué en 1645. DESCARTES utilisa, vers 1640, des courbes et des graphiques dont les possibilités furent développées par l'apparition de dispositifs mécaniques : planimètre de HERMANN, en 1819, planimètre d'AMSLER en 1845, intégrateur à plateau de THOMSON, en 1876.

En 1860, MAXWELL mit en évidence la similitude des formules mathématiques entre les systèmes mécaniques et les systèmes électriques. Cette analogie, encore appelée « analogie force-tension » a été obtenue en plaçant côte à côte les équations régissant le système physique étudié, et les équations du circuit électrique proposé comme analogue. Certains auteurs appellent aussi cette analogie « l'ancienne analogie », par opposition à celle découverte en 1929, ou analogie « masse-inductance ».

Les premiers calculateurs analogiques électriques ont été réalisés par Westinghouse en 1925, sous forme de calculateurs à courant continu à réseaux passifs. Un calculateur électromécanique utilisant des intégrateurs à disque et à plateau et des moteurs électriques asservis fut réalisé en 1927. Durant la seconde guerre mondiale, les premiers calculateurs de tir firent leur apparition, mais ce n'est qu'en 1950, après l'invention de l'amplificateur à compensation de dérive, que les procédés à amplificateurs à grand gain connurent leur développement.

Actuellement, on assiste à la synthèse des moyens de calcul analogiques et numériques, sous forme de machines hybrides, utilisées soit comme analyseurs différentiels digitaux, soit pour la préparation et l'affichage de problèmes analogiques par des machines digitales, soit encore pour l'association « en ligne » des calculateurs analogiques et digitaux.

S = A.E.

En calcul analogique à courant continu, on réalise des réseaux dans lesquels les tensions sont proportionnelles aux grandeurs des systèmes physiques simulées, de telle sorte que le comportement du circuit réalisé soit soumis à une équation, ou un système d'équations, similaire à celui du système étudié.

Par exemple (Fig. 1), considérons une

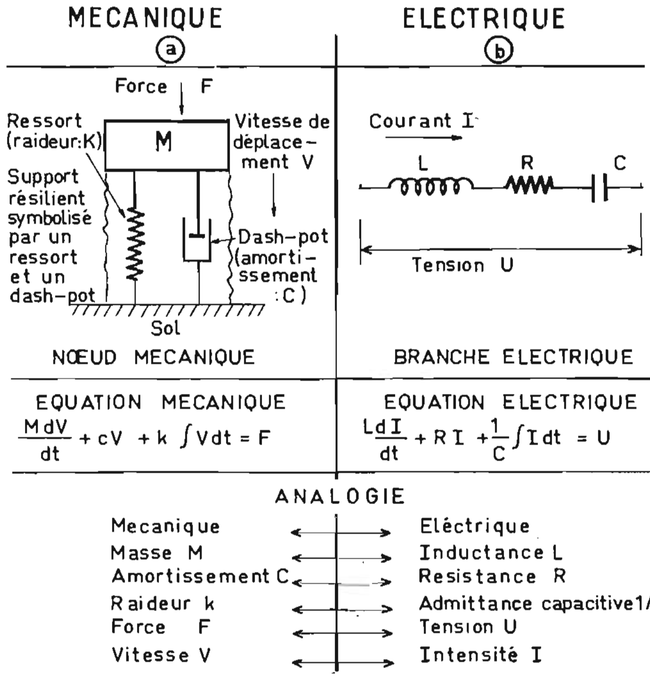


Fig. 1. — *Analogie mécanique électrique.*

masse M, posée sur un support résilient : ce support peut être assimilé à un ressort, en parallèle sur un « dash-pot », dispositif qui joue le rôle d'amortisseur, et constitué d'un piston se déplaçant dans un bain d'huile.

Si l'on exerce un effort F sur cet ensemble masse/dash-pot/ressort, celui-ci va se déplacer à la vitesse V ; la vitesse V peut être déterminée par la résolution d'une équation différentielle du second ordre, à coefficients constants. Ces derniers sont des paramètres physiques simples : la masse, la raideur du ressort, le coefficient d'amortissement du dash-pot.

Considérons alors une branche électrique contenant en série une bobine d'induction, d'inductance L, une résistance R et un condensateur de capacité C.

Si on applique une tension U quelconque aux bornes de la branche électrique, le courant I qui apparaît sera aussi solution d'une équation différentielle ; cette équation ne fait que transformer sous forme mathématique la loi d'électricité disant que la différence de potentiel aux bornes de la branche électrique est égale à la somme des différences de potentiel aux bornes de chacun des composants placés en série. Aux bornes de la bobine, apparaît une différence de potentiel égale à $L \frac{dI}{dt}$, qui fait intervenir la différentielle de l'intensité du courant, donc l'amplitude de sa variation dans le temps (si I est constant, l'intensité ne varie pas et $\frac{dI}{dt} = 0$). Le passage du courant I dans la résistance R crée, à ses bornes une chute de potentiel RI. Enfin, dans le condensateur apparaissent des charges électriques q, dont le nombre s'obtient en faisant la somme de toutes les quantités élémentaires d'électricité qui s'accumulent, dans le condensateur, pendant un intervalle de temps (dt) extrêmement court : si, entre deux instants extrêmement rapprochés : t_1 et $t_1 + dt$, l'intensité du courant est I_1, la quantité élémentaire d'électricité accumulée dans le condensateur pendant cet intervalle de temps dt extrêmement court sera : I_1dt.

Par définition, $q = \int Idt$ représente la somme de toutes ces quantités élémentaires d'électricité accumulées entre l'instant 0 et un instant quelconque. C'est « l'intégrale » du courant. La différence de potentiel qui prend naissance aux bornes du condensateur est le rapport de la charge accumulée q à la capacité C du condensateur. C'est donc :

$$\frac{1}{C} \int I \, dt$$

On obtient alors l'équation électrique donnant le courant I :

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I \, dt = U$$

La tension U est la cause ; le courant I est l'effet.

Dans le système mécanique, la force F est la cause du déplacement V. D'où l'idée de faire une analogie entre la force et la tension d'une part, la vitesse et l'intensité d'autre part.

On met ensemble les causes, et on regroupe les effets.

Cette analogie est d'autant plus aisée que les équations mécanique et électrique ont la même forme.

D'où l'idée de faire une correspondance entre les éléments mécaniques et les éléments électriques, entre la masse et l'inductance, entre l'amortissement du dash-pot et la résistance, entre la raideur du ressort et l'admittance capacitive.

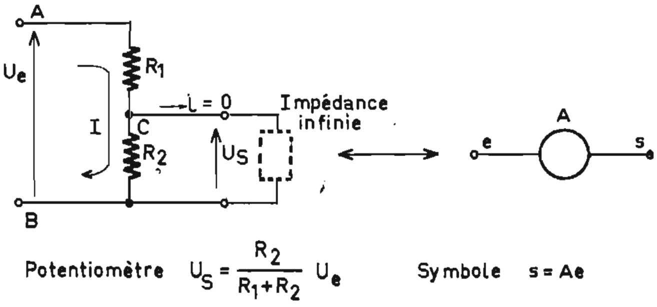


Fig. 2. — *Opérateur linéaire.*

Ainsi, au lieu d'étudier le système mécanique, on pourra, par analogie, analyser un circuit électrique analogue au système mécanique.

Considérons le plus simple élément électrique : le potentiomètre (Fig. 2) que l'on suppose branché sur un circuit « ouvert », donc d'impédance d'entrée infinie. Aucun courant électrique ne sort en conséquence dans ce circuit. La tension Ue vaut donc, d'après la loi d'Ohm :

$$Ue = (R_1 + R_2) I$$

tandis que la tension de sortie Us est égale à :

$$Us = R_2 I.$$

En éliminant I, on trouve aisément que

$$Us = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Ue$$

La tension de sortie est liée à la tension d'entrée par une relation du type général :

$$s = Ae$$

où s est la grandeur de sortie, e la grandeur d'entrée, et A l'opérateur qui permet de connaître la sortie, connaissant l'entrée.

$$\text{Ici } A = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Le circuit joue le rôle d'atténuateur, de coefficient d'atténuation A compris entre 0 et 1. Le système mécanique jouant le rôle du potentiomètre atténuateur est le dash-pot : lorsqu'on lui applique une force F, il se déplace à la vitesse V et la relation entrée-sortie est ici :

$$F = cV$$

L'atténuateur électrique est le seul composant qui présente une telle simplicité. Tous les autres opérateurs linéaires de calcul sont réalisés à partir d'amplificateurs opérationnels.

Le calcul opérationnel

Le calcul opérationnel permet de transformer n'importe quelle équation différentielle complexe en une équation simple, dans laquelle apparaissent la cause (ou la grandeur d'entrée) E, l'effet (ou la grandeur de sortie) S, et un opérateur A qui ne sera plus linéaire :

$$S = A.E$$

Le calcul opérationnel est ainsi, surtout, un procédé commode et élégant permettant de calculer les solutions d'équations régissant les phénomènes physiques (1).

Considérons une fonction h (t) quelconque, dans laquelle intervient, comme paramètre fondamental : le temps t. Cette fonction peut être différentielle, intégrale,... : la méthode s'applique aisément.

Nos lecteurs ayant reçu quelques notions de mathématiques supérieures ne seront guère étonnés d'apprendre que l'intégrale suivante :

$$I = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \, h(t) \, dt$$

(où p est un paramètre « complexe », indépendant de t), est une fonction g (p) qui dépend exclusivement du paramètre p.

C'est la transformation de CARSON-LAPLACE.

Peu importe, pour les lecteurs ne connaissant pas la notation intégrale, de connaître cette définition !

L'important est de savoir que nous allons TRANSFORMER l'équation h (t) en une autre équation g (p) sur laquelle il sera beaucoup plus simple de travailler. L'utilisateur du calcul opérationnel n'a besoin que du tableau donnant la transformation entre la fonction h (t) du temps, et la fonction g (p) du paramètre complexe p (et vice versa : connaissant p, on déterminera h (t). On écrira symboliquement :

$$g(p) = \mathbf{L} h(t)$$

pour faire comprendre que g (p) est la transformée de CARSON-LAPLACE, de h (t).

Quelques exemples de transformées

- Dans la transformation de Carson-Laplace, la transformée d'une constante est une constante : $\mathbf{L}\ A = A$ où A est une constante.
- Si maintenant g (p) est la transformée de h (t), la transformée de A.h (t), où A est une constante sera A. g (p).
- La transformée d'une somme de fonctions est égale à la somme des transformées de chaque fonction :

$$\mathbf{L}\left(h_1(t) + h_2(t)\right) = \mathbf{L}\ h_1(t) + \mathbf{L}\ h_2(t)$$

- La transformée de la dérivée d'une fonction h (t) est une forme linéaire simple :

$$\mathbf{L} \frac{dh}{dt} = p\,g(p) - p\,h(0)$$

où h (0) est la valeur de la fonction h (t) en temps t = 0, et g (p) est la transformée de Carson-Laplace de h (t).

Si l'on s'arrange pour que la fonction h (t) soit nulle initialement, on voit que l'on a :

$$\mathbf{L} \frac{dh}{dt} = p\,g(p)$$

La transformée de la dérivée d'une fonction est égale au produit de la transformée de cette fonction par le paramètre complexe p.

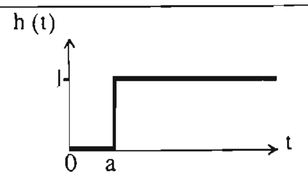
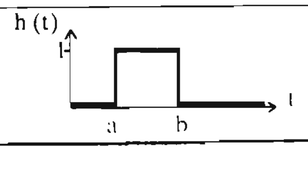
- On a, aussi simplement : la transformée de l'intégrale d'une fonction est égale au quotient de cette fonction par le paramètre complexe p

$$\mathbf{L} \int_0^t h(u)\,du = \frac{g(p)}{p}$$

Le tableau I donne quelques transformées de Carson-Laplace des fonctions usuelles.

(1) On lira avec un grand intérêt l'ouvrage de MM. KAUFMANN et DENIS-PAPIN : « Cours de Calcul Opérationnel », éditions Albin Michel.

TABLEAU I. – TABLE DES TRANSFORMÉES

fonction du temps	fonction transformée g(p)
1	1
$\frac{1}{p}$	t
$\left(\frac{1}{p}\right)^n$	$\frac{t^n}{n\,!}$ avec $n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n$
$\frac{P}{p+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{p+a}$	$\frac{1-e^{-at}}{a}$
$\frac{Pa}{p^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{P^2}{p^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{1}{P(p+a)}$	$\frac{e^{-at}}{a^2} + \frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab}\left(1 + \frac{be^{-at} - ae^{-bt}}{a-b}\right)$
$\frac{P}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a-b}$
$\frac{P^2}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}$
$\frac{P(p+b)}{(p+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\cos(at)$
$\frac{Pa}{(p+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\sin(at)$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}\left[1 - e^{-at}(1+at)\right]$
$\frac{P}{(p+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{P^2}{(p+a)^2}$	$e^{-at}(1-at)$
$\frac{P+C}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{c}{ab} + \frac{c-a}{a(a-b)}e^{-at} + \frac{c-b}{b(b-a)}e^{-bt}$
$\frac{1}{(p+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b\sqrt{a^2+b^2}}e^{-at}\sin(bt-\varphi)$ et $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$
$\frac{1}{p^2+2ap+\omega o^2}$ (avec : $\omega o^2 > a^2$)	$\frac{1}{\omega o^2}\left[1 - \frac{\omega o}{\omega}e^{-at}\sin(\omega t+\varnothing)\right]$ et $\begin{cases}\omega^2 = \omega o^2 - a^2\\ \operatorname{tg}\varnothing = \omega/a\end{cases}$
$\frac{P}{p^2+2ap+\omega o^2}$ (avec : $\omega o^2 > a^2$)	$\frac{e^{-at}}{\omega}\sin(\omega t)$ avec $\omega^2 = \omega o^2 - a^2$
$\frac{P^2}{p^2+2ap+\omega o^2)}$ (avec : $\omega o^2 > a^2$)	$-\frac{\omega o}{\omega}e^{-at}\sin(\omega t-\varnothing)$ avec $\begin{cases}\omega^2 = \omega o^2 - a^2\\ \operatorname{tg}\varnothing = \omega/a\end{cases}$
e^{-pa}	
$e^{-pa} - e^{-pb}$	

Connaissant la fonction h (t), on en déduit aisément sa transformée g (p).

Si, au contraire, on a une fonction g (p), on se reportera au tableau pour la détermination de la loi h (t).

Application à la branche électrique

Reconsidérons maintenant la branche électrique de la figure 1, et son équation électrique :

$$\mathbf{L}\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I dt = U$$

L'intensité I du courant est une fonction du temps t. Supposons que l'on applique, au temps t = 0, la tension U (Fig. 3).

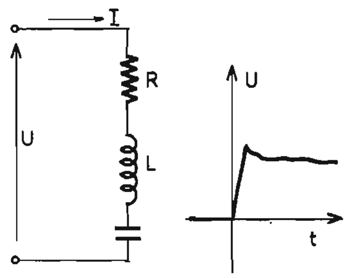


Fig. 3. – A l'instant t, on applique une tension U de forme quelconque : comment varie le courant ?

Appelons S et E les transformées de Carson-Laplace respectives de U et de I.

$$S = \mathbf{L}\ U$$
$$E = \mathbf{L}\ I$$

donc, d'après ce qui précède :

$$pE = \mathbf{L}\ \frac{dI}{dt}$$

$$\text{et } \frac{E}{p}\mathbf{L} \int I\,dt$$

La transformation de l'équation électrique est alors aisée :

$$\mathbf{L}\,p\,E + R\,E + \frac{E}{pC} = S$$

soit encore :

$$(\mathbf{L}p + R + \frac{1}{pC})\ E = S$$

Le facteur :

$A = \mathbf{L}p + R + \frac{1}{pC} = \frac{S}{E}$ est appelé l'impédance opérationnelle du circuit.

Supposons simplement que U ait une valeur constante, égale à 1 volt ; on est à même alors de calculer la valeur de l'intensité : si U = 1 :

- le tableau 1 donne : S = 1
- donc $E = \dfrac{1}{\mathbf{L}p + R + \frac{1}{pC}}$
- soit encore :

$$E = \frac{pC}{1 + RCp + \mathbf{L}Cp^2}$$

- soit enfin,

$$E = \frac{1}{\mathbf{L}}\ \frac{P}{p^2 + \frac{R}{\mathbf{L}}p + \frac{1}{\mathbf{L}C}}$$

- posons $\omega o^2 = \frac{1}{\mathbf{L}C}$ et $2a = \frac{R}{\mathbf{L}}$, d'où :
- $E = \frac{1}{\mathbf{L}}\ \frac{P}{p^2 + 2ap + \omega o^2}$

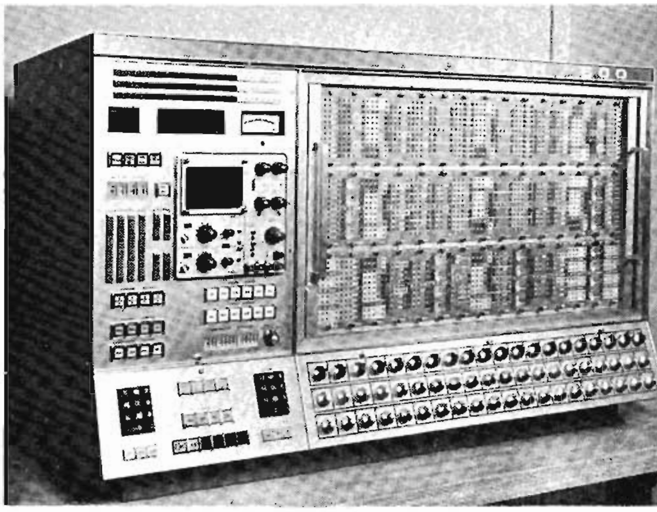


Photo n° 1 : *le calcul électronique... non digital.* (Cliché TELEMECANIQUE)

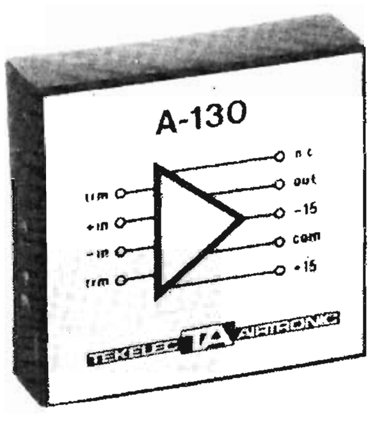


Photo n° 2 : *amplificateur à courant continu.*

● Supposons que ωo^2 soit supérieur à a^2, donc $\frac{1}{LC}$ supérieur à $\frac{R^2}{4L^2}$

● Le tableau (I) montre que la transformée inverse de E, soit I a pour valeur :

$$I = \frac{C}{\omega}{}^{-at} \sin \omega t \quad \text{avec } \omega^2 = \omega o^2 - a^2$$

donc $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

et l'expression de I est égale à :

$$I = \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} \quad \frac{R^2}{4L^2}}\ t\right)$$

L'analogie mécanique-électrique (Fig. 1) permet de connaître la réponse du nœud mécanique, recevant une impulsion, en remplaçant dans la formule précédente I par V, le rapport R/L par le rapport C/M et le produit LC par M/k.

L'AMPLIFICATEUR A COURANT CONTINU

Plus généralement, lorsqu'un problème de physique se traduit par une équation compliquée, on aura deux moyens de résolution :

● la technique digitale : on traduit l'équation en une suite de séquences élémentaires de calculs (le programme) que l'on traite sur ordinateur (photo 2) ;

● la technique analogique : l'équation est remplacée par un circuit électrique « analogue » et l'on étudiera la forme des courants et tensions électriques dans le circuit. Ce circuit est un calculateur analogique (Fig. 4).

L'élément fondamental d'un tel calculateur est l'amplificateur à courant continu, à grand gain. Son impédance d'entrée est très grande et son impédance de sortie quasi nulle. On peut ainsi isoler les amplificateurs les uns des autres et les considérer comme des sources de tension. Les tensions d'entrée e, et de sortie s sont reliées par : $S = - A.E.$

En général, deux impédances de calcul sont connectées : l'une Z_R est placée en contre-réaction sur l'amplificateur, l'autre Z_E étant placée à l'entrée (Fig. 5).

Ici, le calcul est simple : comme l'impédance d'entrée de l'amplificateur est très grande, aucun courant n'entre dans l'amplificateur. Les niveaux de tension (Fig. 5), par rapport à la masse, sont : en (a) : E

en (b) : $-\frac{S}{A}$

en (c) : S

L'amplificateur multiplie par – A la tension en b.

Cet étage amplificateur est, par conséquent, analogue au circuit de la figure 2, mais les tensions Ue et Us sont ici :

$Ue = S - E$

$Us = -\frac{S}{A} - E$

On a alors : $\frac{Us}{Ue} = \frac{Ze}{Ze + Z_R}$

soit :

$$\frac{S - E}{-\frac{S}{A} - E} = \frac{Ze}{Ze + Z_R}$$

équation qui a pour solution :

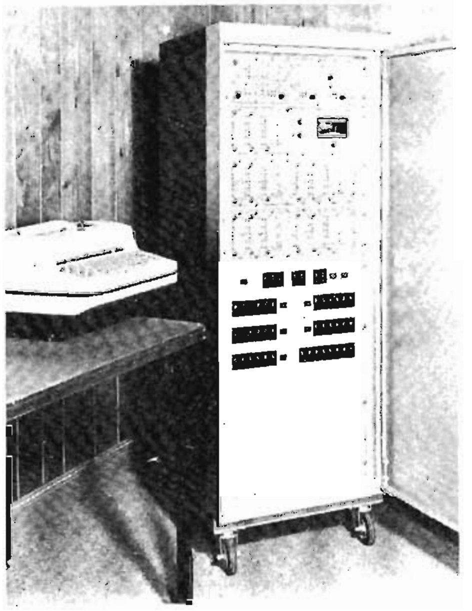


Photo n° 3 : *les calculateurs analogiques ALPAM de la TELEMECANIQUE servent à la surveillance et au comptage de production de gaz, ainsi qu'à la simulation de systèmes naturels ou artificiels (chimie, biologie...) et à la résolution d'équations algébriques et différentielles en mécanique, électricité, chimie.*

$$S = -\frac{Z_R}{Ze\left(1 + \frac{1}{A}\right) + \frac{Z_R}{A}} E$$

Comme A est très grand, $\frac{1}{A}$ est très petit, de sorte que l'amplificateur a pour réponse :

$$S = -\frac{Z_R}{Ze} E$$

Considérons alors le cas simple de la figure 6, où l'impédance d'entrée Ze est une

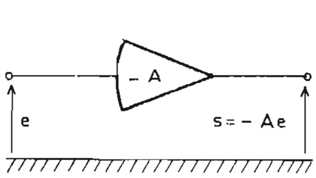


Fig. 4. – *Schéma de principe d'un amplificateur à grand gain (10^3 à 10^9).*

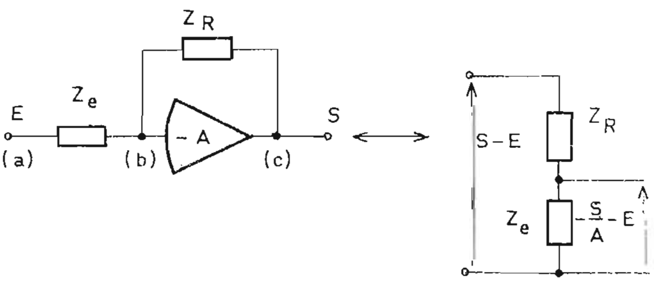


Fig. 5. – *Amplificateur inverseur.*

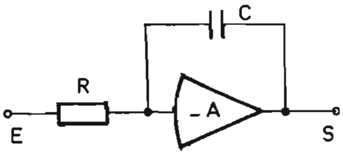


Fig. 6. — *Amplificateur intégrateur.*

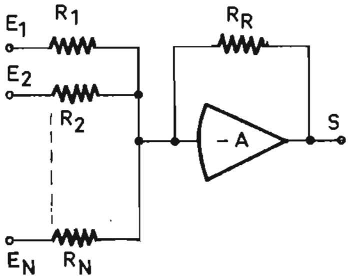


Fig. 7. — *Amplificateur sommateur.*

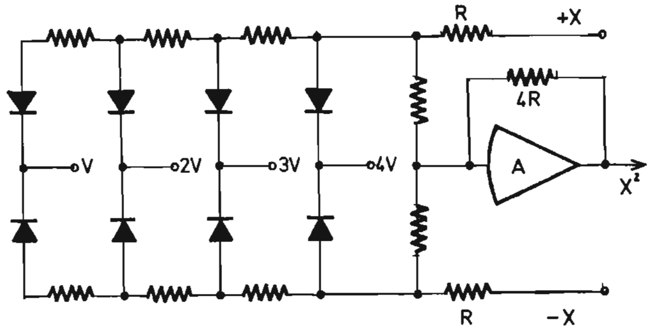


Fig. 8. — *Générateur de carré à diode.*

simple résistance R et l'impédance de réaction ZR est un condensateur de capacité C, donc d'impédance opérationnelle $\frac{1}{pC}$.

On a alors : $S = -\frac{1}{p\,RC}\,E$.

La tension de sortie S s'obtient en divisant la tension E par p : cela signifie pratiquement que l'on va faire une intégration, dans le temps, de la tension E.

On a là un premier élément de calcul analogique.

SOMMATION...

Un amplificateur peut avoir plusieurs entrées (Fig. 7) : on obtient dans ce cas un amplificateur sommateur, dont la tension de sortie S est donnée par

$$S = -\left[\frac{R_R}{R^1}E^1 + \frac{R_R}{R^2}E^2 + ... + \frac{R_R}{R_N}E_N\right]$$

Il est donc possible d'additionner des tensions de calcul, chaque tension étant affectée d'un coefficient de pondération.

...ET OPÉRATIONS

Des éléments non-linéaires faisant généralement appel à des circuits à diodes, permettent de réaliser un certain nombre de fonctions mathématiques :

- multiplication
- élévation au carré et extraction de racine carrée
- sinus et cosinus
- logarithme et exponentielle

En outre, ces circuits peuvent être conçus, à la demande de l'utilisateur, pour générer des fonctions mathématiques diverses.

La figure 8 présente l'un de ces dispositifs.

LES CALCULATEURS ANALOGIQUES (photo 3)

Ainsi donc, les divers opérateurs de calcul précédents sont aptes à résoudre des équations algébriques et à intégrer des équations différentielles. Les phénomènes physiques les plus divers pourront alors être simulés dans un calculateur analogique : suspension de voiture, pendule simple suspendu à un ressort vibrant, vibration d'une construction sous l'effet du vent, systèmes asservis..., ces problèmes sont traités, dans un calculateur analogique, en associant amplificateurs à courant continu, résistances, condensateurs et diodes.

On utilisera donc les calculateurs analogiques chaque fois que l'on désirera faire une simulation en temps réel : simulations d'avions, d'engins, de réacteurs nucléaires, de systèmes mécaniques les plus divers.

La tendance actuelle de certains centres de calculs est de s'orienter vers un moyen de calcul mixte, dit « calcul hybride », où l'on tente de réunir les avantages du calcul analogique et du calcul digital, par couplage d'une machine analogique à un ordinateur. De tels ensembles existent actuellement, notamment aux USA (NASA, BOEING) et en France (LRBA, CEA).

Marc FERRETTI.