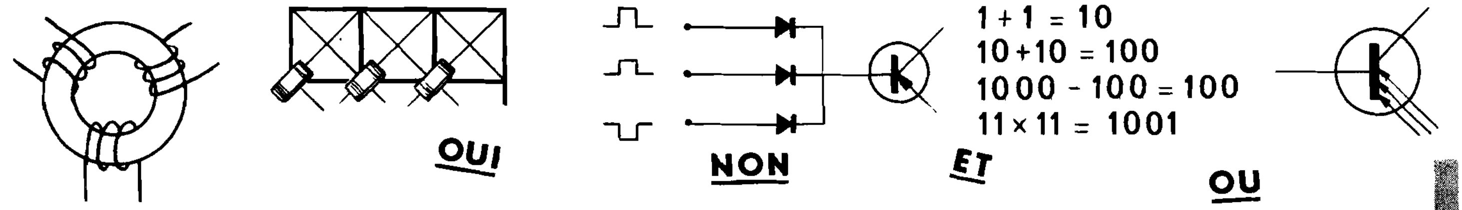
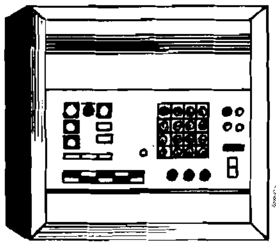


INITIATION AU CALCUL ELECTRONIQUE



Schémas d'opérateurs logiques

ON a indiqué précédemment la fonction et la composition des portes ET, OU et NON, ainsi que leur représentation symbolique.

On notera le fait très important que les problèmes de calcul électronique (ou, en étape plus avancée, **l'informatique**) peuvent être traités à l'aide de symboles remplaçant les véritables schémas.

Ceci est très utile, car l'étude des calculateurs électroniques, en ce qui concerne leur emploi, peut être abordée par des personnes n'ayant que peu de connaissances de l'électronique.

Par contre, ceux qui s'occupent de la conception des calculateurs électroniques, de leur construction, de leur entretien et de leur dépannage doivent être, évidemment, des électroniciens de niveau plus ou moins élevé selon leur spécialité.

Des schémas, qui complets seraient très compliqués, peuvent être remplacés par des **logigrammes** où les circuits réels sont remplacés par des symboles.

La figure 1 indique à nouveau les trois symboles des portes ET, OU et de la négation ou inversion NON.

Ces représentations symboliques correspondent à des schémas dont il existe un nombre important de variantes. Quelques-unes ont été indiquées dans les précédents articles. Ces **opérateurs** ou portes, sont réalisables avec des diodes, des transistors, des combinaisons de semi-conducteurs et avec des circuits intégrés.

La figure 2 montre des circuits ET, OU et NON contenant des négations.

SOMME ET RETENUE

L'opération addition des nombres binaires (c'est-à-dire formés avec des 0 (zéros) et des 1 (uns) est basée sur la table :

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 10$$

ce **10** se lit **deux.**

Lorsqu'on additionne 1 et 1, la somme est 10 qui vaut **deux.**

Dans ce nombre 10, on distingue deux rangs ou **poids,** le plus petit qui est ici 0 et le **poids** le plus élevé qui est, dans ce nombre, 1. Dans un nombre à plusieurs chiffres, par exemple :

$$N = 1011010$$

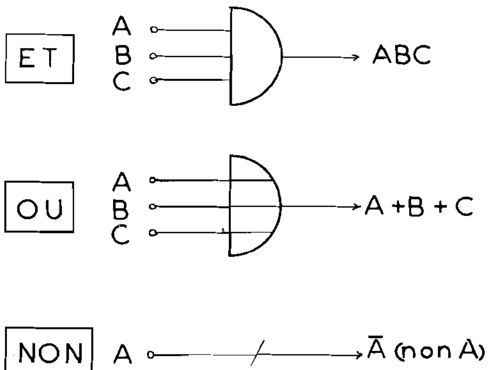


FIG. 1

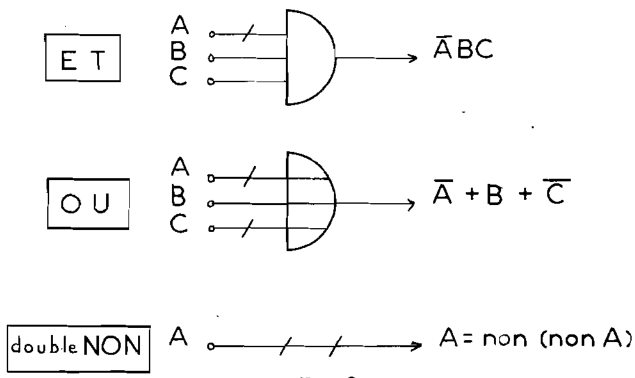


FIG. 2

Les **poids,** de plus en plus élevés se déterminent de droite à gauche : le plus **léger** est le zéro de droite et le plus lourd est le 1 de gauche (voir Fig. 3).

Ceci est facile à retenir en se référant aux nombres décimaux, par exemple le nombre :

$$N = 258403$$

où le nombre du plus faible poids est celui des unités, 3, et celui du plus fort poids est celui des centaines de mille, 2.

Lorsqu'on effectue une addition de nombres binaires, on a des **sommes** et des **retenues.**

Ainsi, si l'on veut additionner 1011 et 1110, on a :

$$\begin{array}{r} 1011 \\ +\ 1110 \\ \hline 11001 \end{array}$$

qui s'effectue comme suit : 1 + 0 = 1, retenue 0, 1 + 1 = 10, j'écris 0 et retiens 1 , 1 (retenue) + 1 = 10 j'écris 0 et retiens 1 , 1 (retenue) + 1 = 10, 10 + 1 = 11 j'écris 1 et retiens 1 que j'écris à gauche de 1001 déjà trouvé, ce qui donne 11001.

Soit le cas de l'addition des deux nombres binaires à **un seul chiffre,** *a* et *b*. Comme, dans la numération binaire, le chiffre ne peut être que 0 ou 1, il n'y a que quatre additions possibles si l'on donne à *a* et *b* les valeurs 0 et 1, comme ci-dessous :

(1) $a = 0, b = 0$ $a + b = 0$ (zéro)
(2) $a = 0, b = 1$ $a + b = 1$ (un)
(3) $a = 1, b = 0$ $a + b = 1$ (un)
(4) $a = 1, b = 1$ $a + b = 10$ (deux)

On remarque immédiatement que :

(A) Dans les additions (1) (2) et (3), la somme est à un seul chiffre, respectivement 0,1 et 1.

(B) Dans l'addition (4) la somme $a + b = 1 + 1 = 10$ est à deux chiffres où le chiffre du poids le plus faible est 0 (zéro) et celui du poids le plus élevé est 1 (un).

L'ensemble de ces opérations peut s'écrire sous forme de tableau.

Tableau 1

a	b	S	R
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Dans ce tableau, l'addition de deux nombres *a* et *b* qui ne peuvent être que 0 ou 1, S est, dans la somme, le chiffre du plus faible poids et R celui du poids le plus élevé.

S est donc, dans une addition, le **chiffre que l'on écrit** et **R la retenue.**

Au sujet de cette retenue R, on peut voir aisément, en consultant le tableau I que l'on a :

$$R = a.b$$

c'est-à-dire **R est le produit des deux nombres *a* et *b* d'un chiffre chacun.** Ceci est très important... à retenir.

Vérifions-le. Si $a = 0$, $b = 0$, on a $S = 0$ et $R = 0$ donc $R = ab$.

Si $a = 0$ et $b = 1$, on a $S = 1$ et $R = ab = 0.1 = 0$.

Si $a = 1$ et $b = 1$, on a $S = 1$ et $R = 0$.

Si $a = 1$ et $b = 1$, on a $S = 0$ et $R = 1$ c'est-à-dire $R = a.b = 1.1 = 1$.

Donc R = 1 **seulement si** $a = 1$ et $b = 1$, dans tous les autres cas R = 0.

D'autre part S qui est le chiffre du poids le plus petit (et non la somme de a et b) est donné par les relations :

S = 0 si a et b sont égaux à zéro.

S = 1 si a ou b est égal à 1 mais pas a et b à la fois.

S = 0 si a et b sont égaux à 1.

Négation.

Comme on l'a défini précédemment, on désigne par $\bar{a}$ (qui se lit *a* **barre** (et non *a* barré), l'opposé de a, autrement dit si $a = 1$, $\bar{a} = 0$; si $a = 0$, $\bar{a} = 1$ ce qui peut se résumer par le tableau II.

LOURDS ← Poids → LEGERS

Décimal	2 5 8 4 0 3
Binaire	1 0 1 1 0 1

FIG. 3.

Tableau II

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

et on voit que quel que soit a, on a toujours :

$$a + \bar{a} = 1$$

car si $a = 1$, $\bar{a} = 0$ et si $a = 0$, $\bar{a} = 1$.

De même $a\bar{a}$ est toujours nul.

Fonction OU

L'opération OU réalisable avec une porte OU effectue l'addition selon Boole.

Dans le cas de deux nombres a et b à un seul chiffre, qui ne peut être que zéro ou un (0 ou 1), on a le tableau suivant :

Tableau III

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

De ce tableau, on tire les conclusions suivantes :

$a + b$ ne peut être nulle que si a ET b sont nuls. Dans tous les autres cas, $a + b = 1$, le OU est inclusif et signifie, lorsqu'il s'agit de a et b : l'un ou l'autre ou les deux.

Rappelons les relations de Morgan :

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \qquad (1)$$

$$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b} \qquad (2)$$

qui se vérifient aisément en donnant à a et b des valeurs 1 et 0, par exemple :

$a = 1$, $b = 0$

donc $\bar{a} = 0$, $\bar{b} = 1$

$a + b = 1$, $\overline{a + b} = 0$

$ab = 0$, $\overline{ab} = 1$

La première relation (1) donne l'identité 0 = 0 et la deuxième 1 = 1.

Equation logique.

Revenons au terme S défini plus haut. On a vu que si a et b sont des nombres à un chiffre (0 ou 1), S est le chiffre du plus faible poids de leur somme, donc S ne peut être, lui aussi, que 0 ou 1.

Soit le cas de S = 1.

Ceci n'est possible que si $a = 1$ et $b = 0$, ou, $a = 0$ et $b = 1$. Remplaçons cette condition par la suivante écrite avec les *et* et *ou* en majuscules :

S = 1 si : $a = 1$ ET $b = 0$ OU $a = 0$ ET $b = 1$, ce qui peut s'écrire encore :

$$S = a \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot b \qquad (3)$$

dans laquelle :

$a = 1$ est remplacé par a ;
$b = 0$ est remplacé par $\bar{b}$;
$b = 1$ est remplacé par b ;
$a = 0$ est remplacé par $\bar{a}$;

ET est remplacé par le signe de produit • ;

OU est remplacé par le signe de somme +, où le produit et la somme sont des opérations booléennes (1 + 1 = 1 notamment).

D'autre part, on peut voir également que S = 1 si a ou b sont égaux à 1 mais l'un seulement à la fois. Ceci s'écrit de la manière suivante :

S = 1 si a OU b = 1 mais NON a ET b d'où $S = (a + b) \cdot (\overline{ab})$ (4).

Vérifions que les deux expressions (3) et (4) de S sont équivalentes.

Pour cela, développons la seconde (4).

Dans celle-ci, conformément au théorème de Morgan (2) :

$$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$$

ce qui aboutit à l'expression suivante de (4) :

$$S = (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) \quad (4 \text{ bis})$$

qui peut être traitée comme en algèbre classique :

$$S = a\bar{a} + b\bar{b} + \bar{a}b + a\bar{b} \quad (5)$$

mais, quelles que soient les valeurs de a et b (0 ou 1) on a toujours $a\bar{a} = 0$ et $b\bar{b} = 0$ donc :

$$S = \bar{a}b + a\bar{b}$$

qui est la reproduction exacte de l'expression (3).

De la même manière, en partant de cette dernière et en ajoutant les deux termes seuls $a\bar{a}$ et $b\bar{b}$, on obtient l'expression (5) qui est équivalente à l'expression (4).

LOGIGRAMMES

Les trois symboles graphiques des fonctions ET, OU et NON ont été donnés à la figure 1.

La figure 4 donne le logigramme correspondant à deux chiffres binaires a et b où la retenue R est égale à ab et S est égale à $\bar{a}b + a\bar{b}$.

En effet, le premier circuit ET reçoit a et b et donne le produit ab qui est bien la retenue :

$$R = ab$$

Le deuxième circuit reçoit $\bar{a}$ et b ce qui donne bien à la sortie de ce circuit ET : $\bar{a}b$.

Le troisième circuit ET reçoit a et $\bar{b}$ ce qui donne à la sortie $a\bar{b}$.

Les termes $\bar{a}b$ et $a\bar{b}$ étant appliqués au circuit OU, ils sont additionnés ce qui donne :

$$S = a\bar{b} + \bar{a}b$$

Vérifions avec $a = 1$ et $b = 1$.

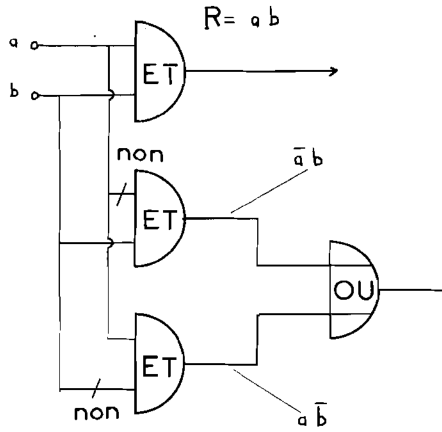


FIG. 4.

On devra trouver pour la somme de ces deux nombres binaires 1 + 1 = 10 donc S = 0 et R = 1.

En effet, on a bien $R = ab = 1 \cdot 1 = 1$ et $S = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$.

Le circuit de la figure 2 réalisé électroniquement est un élément d'addition de a et b.

Ce circuit a utilisé les expressions $R = ab$; $S = a\bar{b} + \bar{a}b$ mais S peut aussi s'écrire :

$S = (a + b)(\bar{a} + \bar{b})$ qui est l'expression (4 bis).

A celle-ci correspond un autre logigramme qui, comportant également des circuits ET et OU et NON, donnera aux sorties, la retenue R et la valeur de S (4 bis).