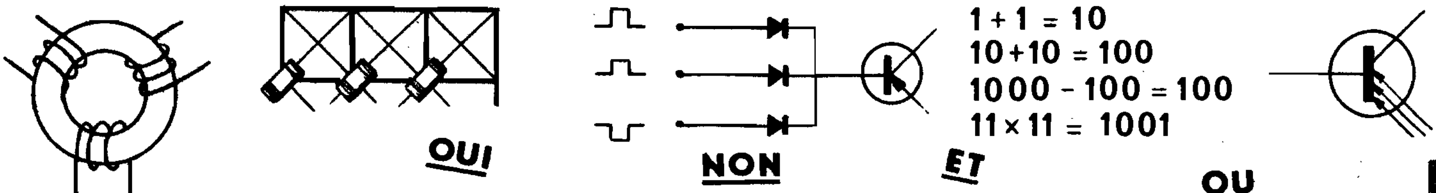
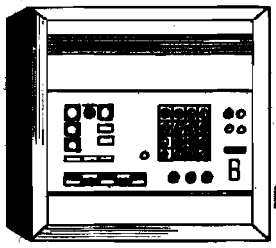


INITIATION AU CALCUL ELECTRONIQUE



Les systèmes de numération

L'ETUDE des calculateurs fait largement appel à certaines notions de mathématiques. Pour un certain niveau de cette étude, les mathématiques qu'il faut connaître sont encore élémentaires, mais elles sont accompagnées de certaines notions nouvelles ou, plutôt inhabituelles, d'une vérité totale mais parfois, **en apparence,** fausses. Ceci ressort surtout des notations. Si l'on écrit dix et on lit **deux**, on peut penser que le lecteur a fait une erreur. En réalité, il a lu juste, mais il aurait dû prévenir qu'il s'agissait d'un nombre du système **binaire** et non **décimal.**

Il existe de nombreux systèmes de numération dont le plus connu est évidemment le système **décimal,** ainsi nommé parce qu'il utilise dix **chiffres** (ou signes) : 0, 1, 2, 3... 9 à l'aide desquels on compose des **nombres.** Les **nombres** inférieurs à dix se confondent avec les **chiffres.**

La **base** d'un système est le nombre des chiffres et ce nombre peut être quelconque à partir de deux.

Le système décimal est relativement moderne ; des systèmes anciens subsistent encore d'une manière rudimentaire comme par exemple le système romain, basé sur quelques lettres : M, D, C, L, X, V, I, dont chacune a une valeur bien déterminée que nous exprimons ci-après en nombres décimaux :

M = 1 000
D = 500
C = 100
L = 50
X = 10
V = 5
I = 1

La composition des nombres ne procède pas du rang du chiffre mais selon certaines règles d'addition ou de soustraction.

Ainsi les trois premiers nombres sont : I, II, III, car **il n'y a pas de zéro.** Pour 4, on utilise l'ensemble soustractif IV (I placé à gauche de V (cinq) représente 4. Les nombres suivants sont par conséquent IV, V. Pour 6, la composition est additive et on écrit VI, donc, après V on a VI, VII, VIII. Pour 9 on applique encore la règle soustractive 9 = IX.

Pour les nombres qui suivent X = 10 on combine selon les besoins, les règles additives et soustractives. Ainsi, on a : X, XI, XII, XIII, XIV, XV,... XX, XXI, etc.

Le nombre 1969 s'écrit :

1969 = M CM LX IX

où M = 1 000, CM = 900, LX = 60, IX = 9

mais on pourrait écrire 1969 également comme suit :

1969 = M D CD LX IX

où M = 1 000, D = 500, CD = 400, LX = 60, IX = 9.

Avec un tel système, on a dû avoir bien des difficultés pour effectuer des additions et des soustractions ; quant aux multiplications et divisions et autres opérations plus compliquées on ne voit pas comment on pourrait les effectuer...

Dans les systèmes de numération modernes **avec l'introduction du zéro** et la valeur attribuée au **rang** du chiffre dans le nombre,, tout se simplifie et les calculs deviennent possibles et aisés.

Commençons par le système décimal parce qu'il est familier à tous. S'il s'agit d'un nombre plus grand que 9 par exemple 1969, il peut s'écrire encore :

$1969 = 10^3 + 9 . 10^2 + 6 . 10^1 + 9 . 10^0$

En partant de **droite à gauche** la valeur (ou **poids**) du chiffre considéré dépend de son emplacement :

Le premier est le chiffre multiplié par $10^0 = 1$.

Le deuxième est le chiffre multiplié par $10^1 = 10$.

Le troisième est le chiffre multiplié par $10^2 = 100$.

Le n-ème est le chiffre multiplié par 10^n.

Un nombre avec décimales peut être décomposé de la même manière :

$2\,453{,}89 = 2 . 10^3 + 4 . 10^2 + 5 . 10^1 + 3 . 10^0 + 8 . 10^{-1} + 9 . 10^{-2}$

S'il y a un zéro, on procède de la même manière par exemple 330,2 604 s'écrit :

$330{,}2\,604 = 3 . 10^2 + 3 . 10^1 + 0 . 10^0 + 2 . 10^{-1} + 6 . 10^{-2} + 0 . 10^{-3} + 4 . 10^{-4}$. Il est clair que $0 . 10^0 = 0 . 1 = 0$ signifie que le nombre des unités de ce nombre est nul. De même, le nombre des millièmes est nul car $0 . 10^{-3} = 0/1000 = 0$.

La numération binaire procède **des mêmes règles** qui sont d'ailleurs valables quel que soit le nombre de chiffres du système de numération.

Soit d'abord le cas où le système de numération est ternaire ; les chiffres sont 0, 1 et 2. Les nombres à un seul chiffre ne sont qu'au nombre de trois :

0 = zéro
1 = un
2 = deux

Pour écrire trois, dans ce système, on applique la règle générale : trois sera désigné par le **signe** 10, autrement dit, dès que l'on a épuisé les chiffres disponibles, on reprend 1 suivi d'un zéro donc :

trois = 10

et en suivant la règle :

quatre = 11
cinq = 12

et pour six, on est obligé d'écrire :

six = 20
sept = 21
huit = 22

ensuite :

neuf = 100
dix = 101
onze = 102
douze = 110
treize = 111

et ainsi de suite.

Prenons aussi l'exemple d'un système duodécimal à douze signes : 0, 1, 2,... 9, α, β.
où α = dix, β = onze.

Soit à écrire le nombre quatorze. On a :

neuf = 9
dix = α
onze = β
douze = 10
treize = 11
quatorze = 12

LE SYSTÈME BINAIRE

Nous ne disposons que de deux signes 0 et 1.

zéro = 0
un = 1
donc : deux = 10
trois = 11
quatre = 100
cinq = 101
six = 110
sept = 111
huit = 1000

etc.

Un nombre quelconque, dans le système binaire ne peut contenir que des 1 et des 0, par exemple, le nombre 11 001,011.

Quelle est sa valeur en numération décimale ? Appliquons la règle générale étant entendu que 10^1 = deux, 10^0 = un, 10^2 = deux au carré = quatre, 10^3 = huit, etc.

Calculons d'abord la partie entière.

11 001

en commençant par le chiffre de **droite :**

$11\,001 = 1 \cdot 10^0 = 1 \cdot$ un
$=$ un décimal
$+ 0 \cdot 10^1 = 0 \cdot$ deux
$=$ zéro décimal
$+ 0 \cdot 10^2 = 0 \cdot$ quatre
$=$ zéro décimal
$+ 1 \cdot 10^3 = 1 \cdot$ huit
$=$ huit décimal
$+ 1 \cdot 10^4 = 1 \cdot$ seize
$=$ seize décimal
donc 11 001 binaire = vingt-cinq décimal : 25.

Passons à la partie qui suit la virgule, de **gauche à droite :**
$0{,}011 = 0 \cdot 10^{-1} = 0 \cdot (1/2$ décimal)
$=$ zéro décimal
$+ 1 \cdot 10^{-2} = 1 \cdot (1/4$ décimal)
$= 0{,}25$ décimal
$+ 1 \cdot 10^{-3} = 1 \cdot (1/8$ décimal)
$= 0{,}125$ décimal
donc 0,011 binaire = 0,25 + 0,125 = 0,375 décimal. Finalement : 11 001,011 binaire = 25,375 décimal.

Donnons encore un exemple. Soit le nombre binaire 110 010. On a, en calculant de gauche à droite et en négligeant le calcul des zéros :
110 010 = 0 + 1 (deux)
= 2 décimal
+ 0 . (deux au carré)
= 0 décimal
+ 0 . (deux au cube)
= 0 décimal
+ 1 (deux puiss. 4)
= 1 . 16 = 16 décimal
+ 1 (deux puiss. 5)
= 1 . 32 = 32 décimal
= 2 + 16 + 32 décimal
= 50 décimal

MÉTHODE PLUS RAPIDE

Comme les signes 2 à 9 n'existent pas dans le système binaire on peut les utiliser dans les calculs avec leurs vraies valeurs qui sont deux = 1 + 1, trois = 1 + 1 + 1... neuf = 1 + 1... + 1.

Reprenons notre dernier exemple où le nombre binaire est 110 010.

On a 110 010 binaire $= 0 + 1 \cdot 2^1 + 0 + 0 + 1 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 2 + 16 + 32$ décimal $= 50$ décimal.

De même, le nombre binaire 11 001,011, s'écrit :
$11\,001{,}011 = 1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$ binaire et en décimal $= 16 + 8 + 1 + 0{,}25 + 0{,}125 = 25{,}375$.

Tout ceci est extrêmement simple mais **il faut faire attention de ne pas se tromper** en confondant les expressions binaires avec les expressions décimales.

ADDITION DES NOMBRES BINAIRES

Les additions s'effectuent de la même manière que les additions des nombres décimaux en tenant compte du fait que :

0 + 0 = 0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1
1 + 1 = 10
1 + 1 + 1 = 11 etc.

en notation binaire.

Soit, par exemple à additionner deux nombres binaires 11 010 + 10 010. Ecrivons comme d'habitude :

$$\begin{array}{r} 11\,010 \\ +\ 10\,010 \\ \hline 101\,100 \end{array}$$

en raisonnant comme suit : 0 + 0 = 0 puis 1 + 1 = 10 donc, j'écris 0 et retiens 1 ; 1 + 0 + 0 = 1 et j'écris 1 ; 0 + 1 = 1 et j'écris 1 ; 1 + 1 = 10, j'écris 0 et retiens 1 ; j'écris 1 ce qui donne 101 100.

Vérifions qu'il n'y a pas eu d'erreur. Les valeurs des deux nombres à additionner sont 26 et 18 (décimal). Le nombre binaire représentant la somme 26 + 18 = 44 étant 101 100, il vaut :

101 100 binaire = en décimal : $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 = 32 + 8 + 4 = 44$ décimal donc notre addition était juste.

ADDITION DE PLUSIEURS NOMBRES BINAIRES

Lorsqu'on additionne **deux** nombres binaires, le maximum des sommes partielles est 1 + 1 = 10, ce qui conduit à écrire sur le total 0, retenir 1 et l'ajouter à la somme partielle suivante, mais si dans cette somme partielle il y a déjà 1 + 1, il faut additionner 1 + 1 + 1 = 11. Dans ce cas on écrit 1 et on retient 1.

Soit par exemple à additionner 1 101 et 1 111 dont les nombres décimaux respectifs sont 13 et 15 :

$$\begin{array}{r} 1\,101 \\ 1\,111 \\ \hline 11\,100 \end{array}$$

Cette somme s'écrit, en décimal, 13 + 15 = 28. En effet pour la vérifier écrivons :

11 100 = en décimal : $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 = 16 + 8 + 4 = 28$.

Soit maintenant le cas de l'addition de 3 nombres binaires : 1 101, 1 111 et 1 110 par exemple :

$$\begin{array}{r} 1\,101 \\ 1\,111 \\ 1\,110 \\ \hline 101\,010 \end{array}$$

L'opération s'effectue avec des sommes partielles de 2, 3 ou 4 chiffres.

L'opération s'est déroulée comme suit, de droite à gauche :
0 + 1 + 1 = 10 ,
on écrit 0 et on retient 1
1 + 1 + 1 = 11 ,
on écrit 1 et on retient 1
1 + 1 + 1 + 1 = 100
on écrit 0 et on retient 10
10 + 1 + 1 + 1 = 101
que l'on écrit à gauche de 010, ce qui donne 101 010.

La valeur exprimée en numération décimale est évidemment $2^5 + 2^3 + 2 = 32 + 8 + 2 = 42$.

TRANSFORMATION DU DÉCIMAL EN BINAIRE

On donne un nombre N en numération décimale et on désire connaître son expression en numération binaire. Si l'on dispose de tables de conversion on peut trouver aisément l'expression binaire cherchée, mais les tables ne peuvent contenir qu'un nombre limité de nombres. La méthode générale de conversion est d'exprimer le nombre décimal en une somme de puissances de 2

$N = 2^m + 2^{m-1} + 2^{m-2} ... + 2^1 + 2^0$ où $2^1 = 2$ et $2^0 = 1$. Ayant obtenu cette somme, on écrit le nombre binaire à l'aide de chiffres 1 successifs pour chaque valeur de 2^m ou les zéros aux rangs où le terme est manquant.

Ainsi, si l'on a obtenu l'expression :

$N = 2^5 + 2^4 + 2^1 + 2^0$, il suffit de la remplacer par N = 110 010 en binaire. En effet on écrit 1 pour 2^5, 1 pour 2^4, 0 pour 2^3, qui manque, 0 pour 2^2 qui manque, 1 pour 2^1 et 0 pour 2^0.

Pour décomposer un nombre décimal en somme de puissance de 2, il suffit de le diviser par 2 autant de fois qu'il est nécessaire pour que le dernier reste soit 1 si le nombre est impair et 0 si le nombre est pair.

Soit par exemple N = 25. On a :
25 = 2 . 12 + 1
= 2 . 2 . 6 + 1
= 2 . 2 . 2 . 3 + 1
= 2 . 2 . 2 (2 + 1) + 1
ce qui donne $2^4 + 2^3 + 1$. Le nombre binaire est par conséquent 11 001.

Si l'on possède une table des puissances de 2, l'opération est plus rapide. Il est très facile d'établir une telle table en partant de 2 et en multipliant successivement par 2. Voici ci-dessous une telle table :

Table des puissances de 2, de zéro à 16

Puissance (n)	Valeur de 2^n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1 024
11	2 048
12	4 096
13	8 192
14	16 384
15	32 768
16	65 536

Soit N = 1 066. Le tableau montre que :

$1\,066 = 2^{10} + (1\,066 - 1\,024)$
ou $1\,066 = 2^{10} + 42$
et comme 42 = 32 + 10, il vient :
$1\,066 = 2^{10} + 2^5 + 10$
puis :
$1\,066 = 2^{10} + 2^5 + 2^3 + 2$,
que nous écrivons, toujours en décimal :
$1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$.

Il suffit maintenant d'écrire, de gauche à droite, les coefficients des 2^n :
N = 10 000 101 010
en numération binaire.

SOUSTRACTION

Les soustractions s'effectuent aisément à l'aide des **nombres complémentaires,** ce qui transforme la soustraction en une addition.

Soit N un nombre décimal et N' le nombre complémentaire. N' se compose en remplaçant chaque chiffre de N par 9 moins ce chiffre et en ajoutant 1.

Exemple : N = 2 347 donc N' = 7 652 + 1 on voit que la somme est :

```
  2 347
  7 652
  -----
  9 999
```

et que si l'on ajoute 1 à cette somme on obtient 10 000 donc :

N + N' est toujours exprimé par un 1 suivi de zéros successifs : 9 999 + 1 = 10 000 où le nombre des zéros est égal au nombre des 9.

Exemple de soustraction de nombres décimaux. Soit un nombre M = 753 et un nombre N = 432. Le complément de N est N' = 1 000 − 452 = 999 − 452 + 1 = 547 + 1. Il en résulte que M − N = M − (1 000 − N')

où M − N = M + N' − 1 000
= 753 + 547 + 1
− 1 000
= 1 301 − 1 000 = 301

et il est facile de vérifier que 753 − 452 est égal à 301. Dans le cas des nombres binaires, les 9 sont remplacés par des 1. Soit un nombre binaire :

N = 10 010 011

Son complément est N' obtenu par la soustraction :

```
  100 000 000
 −  10 010 011
```

que nous n'effectuerons pas car on rencontre des difficultés pour soustraire 1 de 0.

Comme

100 000 000 = 11 111 111 + 1, on effectuera sans aucune difficulté la soustraction :

```
   11 111 111
 − 10 010 011
 ------------
   01 101 100
```

et en ajoutant 1 on obtient :

N' = 1 101 101

Considérons maintenant un nombre M, par exemple :

M = 11 100 011

et effectuons la soustraction M − N.

Comme N = 11 111 111 + 1 − N', il vient :

M − N = M − (11 111 111 + 1) + N'

ou

M − N = M + N' − 100 000 000

Effectuons ce calcul. On a M + N' :

```
   11 100 011
 +  1 101 101
 ------------
  101 010 000
```

Puis M + N' − 100 000 000 = M − N :

```
  101 010 000
 − 100 000 000
 ------------
  001 010 000
```

donc M − N = 1 010 000 = D.

Vérifions que D + N = M :

```
   1 010 000
  10 010 011
 -----------
  11 100 011
```

ce qui est bien la valeur de M choisie à titre d'exemple.

Prenons un deuxième exemple avec M supérieur à N. Dans ce cas on effectue la différence N − M et on changera le signe du résultat.

Soit M = 20 qui s'écrit en binaire 10 100 et N = 30 qui s'écrit en binaire 11 110. Nous effectuerons la différence N − M et on devra trouver 10 en nombre décimal.

Le complément de M = 10 100 est :

M' = 100 000 − M
= 11 111 − M + 1

La soustraction est :

```
   11 111
 − 10 100
 --------
   01 011
```

et en ajoutant 1 on obtient M' = 1 011 + 1 :

```
   1 011
       1
   -----
   1 100
```

donc N − M = N + M' − 100 000

Pour N + M' on a :

```
   11 110
 + 01 100
 --------
  101 010
```

De N + M' on soustrait 100 000, ce qui donne

```
  101 010
 − 100 000
 --------
  001 010
```

donc le reste 1 010 qui est bien égal à 10 en expression décimale. Finalement M − N = − (N − M) = − 1 010.

Nous étudierons la multiplication des nombres binaires dans la suite de cet article.

Pour se familiariser avec le calcul binaire, nous recommandons à nos lecteurs d'effectuer eux-mêmes quelques calculs de conversion, d'addition et de soustraction en choisissant des nombres binaires dont ils connaissent l'expression décimale afin de pouvoir vérifier aisément les résultats. Pour faciliter ce travail nous donnons ci-dessous un tableau de quelques nombres décimaux avec leur expression en binaire.

Conversion décimal/binaire

Décimal	Binaire
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1 000
9	1 001
10	1 010
11	1 011
12	1 100
13	1 101
14	1 110
15	1 111
16	10 000
18	10 010
20	10 100
30	11 110
40	101 000
50	110 010